

# Habilitação técnica em Elettrônica



1

## Circuitos Elétricos

CENTRO PAULA SOUZA



**CENTRO PAULA SOUZA DO GOVERNO DE SÃO PAULO**



# Eletrônica

Volume I

# Eletrônica

## Circuitos elétricos

Antonio Pereira Afonso

Enio Filoni

(autores)



2011



**Presidência**  
João Sayad

**Vice-presidência**  
Ronaldo Bianchi, Fernando Vieira de Mello

**DIRETORIA DE PROJETOS EDUCACIONAIS**

**Direção:** Fernando José de Almeida

**Gerência:** Monica Gardelli Franco, Júlio Moreno

**Coordenação Técnica:** Maria Luiza Guedes

**Equipe de autoria Centro Paula Souza**

**Coordenação geral:** Ivone Marchi Lainetti Ramos

**Coordenação da série Eletrônica:** Jun Suzuki

**Autores:** Antonio Pereira Afonso, Enio Filoni

**Revisão técnica:** Tsuyoshi Okihiro

**Equipe de Edição**

**Coordenação geral:** Carlos Tabosa Seabra,  
Rogério Eduardo Alves

**Coordenação editorial:** Luiz Marin

**Edição de texto:** Roberto Matajs

**Secretário editorial:** Antonio Mello

**Revisão:** Márcia Menin

**Direção de arte:** Bbox Design

**Diagramação:** LCT Tecnologia

**Ilustrações:** Carlos Grillo

**Pesquisa iconográfica:** Completo Iconografia

**Capa**

**Fotografia:** Eduardo Pozella, Carlos Piratininga

**Tratamento de imagens:** Sidnei Testa

**Abertura capítulos:** © Lize Streeter/Dorling Kindersley/  
Getty Images

O Projeto Manual Técnico Centro Paula Souza – Coleção Técnica Interativa oferece aos alunos da instituição conteúdo relevante à formação técnica, à educação e à cultura nacional, sendo também sua finalidade a preservação e a divulgação desse conteúdo, respeitados os direitos de terceiros.

O material apresentado é de autoria de professores do Centro Paula Souza e resulta de experiência na docência e da pesquisa em fontes como livros, artigos, jornais, internet, bancos de dados, entre outras, com a devida autorização dos detentores dos direitos desses materiais ou contando com a permissibilidade legal, apresentando, sempre que possível, a indicação da autoria/crédito e/ou reserva de direitos de cada um deles.

Todas as obras e imagens expostas nesse trabalho são protegidas pela legislação brasileira e não podem ser reproduzidas ou utilizadas por terceiros, por qualquer meio ou processo, sem expressa autorização de seus titulares.

Agradecemos as pessoas retratadas ou que tiveram trechos de obras reproduzidas neste trabalho, bem como a seus herdeiros e representantes legais, pela colaboração e compreensão da finalidade desse projeto, contribuindo para que essa iniciativa se tornasse realidade. Adicionalmente, colocamo-nos à disposição e solicitamos a comunicação, para a devida correção, de quaisquer equívocos nessa área porventura cometidos em livros desse projeto.

O Projeto Manual Técnico Centro Paula Souza – Coleção Técnica Interativa, uma iniciativa do Governo do Estado de São Paulo, resulta de um esforço colaborativo que envolve diversas frentes de trabalho coordenadas pelo Centro Paula Souza e é editado pela Fundação Padre Anchieta. A responsabilidade pelos conteúdos de cada um dos trabalhos/textos inseridos nesse projeto é exclusiva do autor. Respeitam-se assim os diferentes enfoques, pontos de vista e ideologias, bem como o conhecimento técnico de cada colaborador, de forma que o conteúdo exposto pode não refletir as posições do Centro Paula Souza e da Fundação Padre Anchieta.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Bibliotecária Silvia Marques CRB 8/7377)**

A258

Afonso, Antonio Pereira

Eletrônica: circuitos elétricos / Antonio Pereira Afonso, Enio Filoni (autores); Tsuyoshi Okihiro (revisor); Jun Suzuki (coordenador). -- São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2011 (Coleção Técnica Interativa. Série Eletrônica, v. I)

Manual técnico Centro Paula Souza

ISBN 978-85-8028-045-6

I. Eletrônica 2. Circuitos elétricos I. Filoni, Enio II. Okihiro, Tsuyoshi III. Suzuki, Jun IV. Título

CDD 607



**GOVERNADOR**  
Geraldo Alckmin

**VICE-GOVERNADOR**  
Guilherme Afif Domingos

**SECRETÁRIO DE DESENVOLVIMENTO  
ECONÔMICO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**  
Paulo Alexandre Barbosa



**Presidente do Conselho Deliberativo**  
Yolanda Silvestre

**Diretora Superintendente**  
Laura Laganá

**Vice-Diretor Superintendente**  
César Silva

**Chefe de Gabinete da Superintendência**  
Elenice Belmonte R. de Castro

**Coordenadora da Pós-Graduação,  
Extensão e Pesquisa**  
Helena Gemignani Peterossi

**Coordenador do Ensino Superior  
de Graduação**  
Angelo Luiz Cortelazzo

**Coordenador de Ensino Médio e Técnico**  
Almério Melquíades de Araújo

**Coordenadora de Formação Inicial e  
Educação Continuada**  
Clara Maria de Souza Magalhães

**Coordenador de Desenvolvimento  
e Planejamento**  
João Carlos Paschoal Freitas

**Coordenador de Infraestrutura**  
Rubens Goldman

**Coordenador de Gestão Administrativa  
e Financeira**  
Armando Natal Maurício

**Coordenador de Recursos Humanos**  
Elio Lourenço Bolzani

**Assessora de Comunicação**  
Gleise Santa Clara

**Procurador Jurídico Chefe**  
Benedito Libério Bergamo

# APRESENTAÇÃO

Este volume de Eletrônica é o primeiro de uma coleção elaborada especialmente pelo Centro Paula Souza e pela Fundação Padre Anchieta para levar aos alunos das Escolas Técnicas estaduais (Etecs) material didático padronizado, gratuito e de qualidade.

Os livros serão utilizados para pesquisa e como apoio ao conhecimento teórico adquirido em sala de aula, graças à linguagem atraente e inovadora. É mais uma ferramenta aliada à preocupação do Governo do Estado com a qualidade do ensino público profissional.

Disponível em formato de pen-drive, esta publicação ganhará agilidade na atualização de seu conteúdo, sempre que se fizer necessário, o que possibilitará ao aluno consultar informações atualizadas em consonância com as novas tecnologias.

Elaborado a partir de conteúdo preparado por professores do Centro Paula Souza, o material também facilitará aos alunos avaliarem suas competências profissionais exigidas pelo mercado de trabalho.

A existência de um material didático unificado, capaz de traduzir a excelência do nível de ensino da instituição, contribuirá para elevarmos ainda mais a qualidade do ensino oferecido pelo Centro Paula Souza.

Que essa série proporcione a busca constante e a atualização do conhecimento de nossos alunos e estimule os professores ao aperfeiçoamento constante.

**LAURA LAGANÁ**

Diretora Superintendente do Centro Paula Souza

## Capacitação, oportunidade e desenvolvimento

O Estado de São Paulo tem a melhor e mais ampla rede de ensino Técnico e Tecnológico do Brasil. Atualmente já são 49 Faculdades de Tecnologia (Fatecs) e 198 Escolas Técnicas (Etecs) que, juntas, atendem gratuitamente mais de 250 mil estudantes em todo o Estado.

É um modelo de ensino que serve de exemplo ao país e já se tornou sinônimo de capacitação e oportunidade para o jovem que busca seu lugar no mercado de trabalho.

De cada cinco alunos que se formam nas Etecs, quatro têm emprego garantido. Nas Fatecs, a proporção é de nove empregados para cada dez formados.

Mais que uma oportunidade ao jovem, é ainda um instrumento de interiorização do desenvolvimento em todo o nosso Estado, pois oferece cursos específicos de acordo com a vocação econômica de cada região.

A Fundação Padre Anchieta, responsável pela produção deste material didático utilizado pelos nossos futuros técnicos especialistas e tecnólogos, é uma grande aliada de nossos estudantes. Contribui diretamente para que todos conquistem uma formação com mais qualidade e excelência.

**GERALDO ALCKMIN**

Governador do Estado de São Paulo

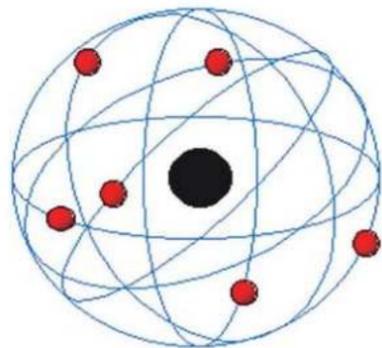
# Sumário

## 18 Descobertas fundamentais

### 23 Capítulo 1

#### Conceitos fundamentais

1.1 Modelos atômicos . . . . .	24
1.2 Carga elétrica . . . . .	25
1.3 Campo elétrico . . . . .	26
1.4 Processos de eletrização . . . . .	27
1.5 Elementos condutores, semicondutores e isolantes . . . . .	29
1.6 Grandezas elétricas, unidades, notação e prefixos . . . . .	30
1.7 Tensão elétrica (U) ou diferença de potencial (ddp) . . . . .	32
1.8 Corrente elétrica . . . . .	33
1.8.1 Sentido da corrente . . . . .	34
1.8.2 Efeitos da corrente elétrica . . . . .	35
1.9 Tensão (corrente) contínua/alternada . . . . .	36
1.10 Potência elétrica (P) . . . . .	37
1.11 Energia elétrica (ε) . . . . .	38



### 39 Capítulo 2

#### Resistência elétrica

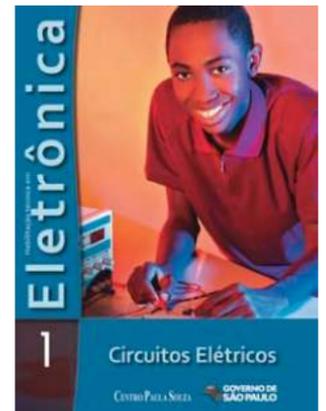
2.1 Resistores . . . . .	40
2.1.1 Simbologia . . . . .	42
2.1.2 Código de cores dos resistores . . . . .	43
2.1.3 Medição da resistência . . . . .	45
2.2 Lei de Ohm . . . . .	46
2.3 Potência dissipada em uma resistência . . . . .	47
2.4 Resistência em um condutor . . . . .	48
2.4.1 Influência do material: resistividade . . . . .	48

2.4.2 Influência do comprimento . . . . .	49
2.4.3 Influência da área da seção transversal do condutor . . . . .	49
2.4.4 Cálculo da resistência . . . . .	50
2.4.5 Influência da temperatura sobre a resistência elétrica . . . . .	51
2.5 Isolante ideal e supercondutores . . . . .	53
2.6 Condutância (G) e condutividade elétricas ( $\sigma$ ) . . . . .	54
2.7 Associação de resistores . . . . .	54
2.7.1 Associação em série . . . . .	55
2.7.2 Associação em paralelo . . . . .	56
2.7.3 Associação mista . . . . .	60
2.8 Transformações delta-estrela ( $\Delta Y$ ) ou estrela-delta ( $Y\Delta$ ) . . . . .	62
2.8.1 Utilização das transformações $\Delta Y$ e $Y\Delta$ na simplificação de circuitos . . . . .	65

### 73 Capítulo 3

#### Geradores e receptores

3.1 Geradores . . . . .	74
3.1.1 Geradores de tensão e de corrente . . . . .	75
3.1.2 Gerador de tensão contínua não ideal . . . . .	77
3.1.3 Rendimento energético ( $\eta$ ) de um gerador . . . . .	78
3.1.4 Máxima transferência de potência de um gerador à carga . . . . .	79
3.2 Receptores . . . . .	83
3.3 Operação conjunta de receptor e gerador . . . . .	86
3.4 Associação de geradores . . . . .	91
3.4.1 Associação em série de geradores . . . . .	91
3.4.2 Associação em paralelo de $n$ geradores iguais . . . . .	93



Capa: José Adilson Neves Jr., aluno do Centro Paula Souza  
Foto: Eduardo Pozella e Carlos Piratininga



# Sumário



3.4.3 Associação de dois geradores em oposição . 95

3.4.4 Associação mista de geradores . . . . . 96

## 99 Capítulo 4 Análise de circuitos elétricos básicos: em série, em paralelo e misto

- 4.1 Circuito em série . . . . . 100
- 4.2 Circuito em paralelo . . . . . 103
- 4.3 Circuito misto . . . . . 106
- 4.4 Caso particular: curto-circuito . . . . . 108

## 111 Capítulo 5 Circuitos divisores de tensão e corrente

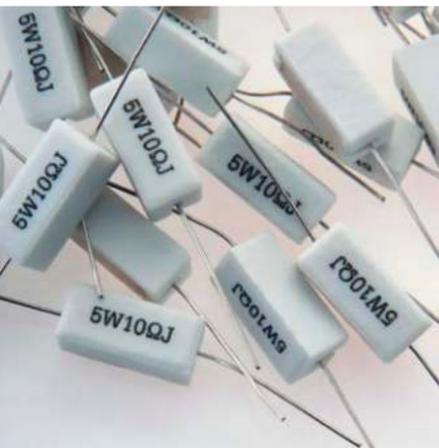
- 5.1 Divisores de tensão . . . . . 112
  - 5.1.1 Divisor de tensão sem carga . . . . . 113
  - 5.1.2 Divisor de tensão com carga . . . . . 122
- 5.2 Circuito divisor de corrente . . . . . 126
- 5.3 Aplicações de divisores de tensão e corrente. . 128

## 129 Capítulo 6 Leis de Kirchhoff

- 6.1 Definições. . . . . 130
- 6.2 Primeira lei de Kirchhoff ou lei dos nós . . . . . 131
- 6.3 Segunda lei de Kirchhoff ou lei das malhas . . . . 132
- 6.4 Resolução de circuitos pelo método da análise de malhas (leis de Kirchhoff) . . . . . 133

## 137 Capítulo 7 Análise de malhas pelo método de Maxwell

- 7.1 Resolução de circuitos pelo método de Maxwell 138



## 143 Capítulo 8 Superposição de efeitos

- 8.1 Resolução de circuitos pelo método da superposição de efeitos . . . . . 144

## 149 Capítulo 9 Teoremas de Thévenin e Norton

- 9.1 Teorema de Thévenin . . . . . 150
  - 9.1.1 Determinação do gerador equivalente de Thévenin . . . . . 151
- 9.2 Teorema de Norton. . . . . 154

## 157 Capítulo 10 Capacitores e indutores em corrente contínua

- 10.1 Capacitores. . . . . 158
  - 10.1.1 Princípio de funcionamento. . . . . 158
  - 10.1.2 Capacitância. . . . . 161
  - 10.1.3 Energia armazenada. . . . . 165
  - 10.1.4 Capacitor plano . . . . . 166
  - 10.1.5 Associação de capacitores. . . . . 169
  - 10.1.6 Regime transitório (capacitor em corrente contínua) . . . . . 173
- 10.2 Indutores. . . . . 181
  - 10.2.1 Princípio de funcionamento . . . . . 181
- 10.3 Energia armazenada no indutor . . . . . 182
  - 10.3.1 Indutor de uma só camada . . . . . 183
  - 10.3.2 Associação de indutores. . . . . 184
  - 10.3.3 Regime transitório (indutor em corrente contínua) . . . . . 187



FOTOS:VALTER JOSÉ MIGUEL

# Sumário



<b>195</b>	<b>Capítulo 11</b>	
	<b>Corrente alternada</b>	
	11.1 Noções básicas . . . . .	198
	11.1.1 Outras grandezas importantes referentes ao sinal CA . . . . .	201
<b>209</b>	<b>Capítulo 12</b>	
	<b>Números complexos</b>	
	12.1 Formas de representação . . . . .	210
	12.1.1 Forma cartesiana ou retangular . . . . .	210
	12.1.2 Forma polar ou trigonométrica . . . . .	211
	12.2 Conjugado de um número complexo . . . . .	212
	12.3 Operações com números complexos . . . . .	212
	12.3.1 Soma e subtração . . . . .	212
	12.3.2 Multiplicação . . . . .	213
	12.3.3 Divisão . . . . .	213
	12.4 Representação da corrente alternada com números complexos . . . . .	213
	12.5 Diagrama de fasores (ou fasorial) . . . . .	214
<b>215</b>	<b>Capítulo 13</b>	
	<b>Circuitos simples em corrente alternada</b>	
	13.1 Circuito resistivo . . . . .	216
	13.2 Circuito capacitivo . . . . .	217
	13.3 Circuito indutivo . . . . .	219



<b>221</b>	<b>Capítulo 14</b>	
	<b>Análise de circuitos em corrente alternada</b>	
	14.1 Circuito RC . . . . .	222
	14.1.1 Resistência e capacitor em série . . . . .	222
	14.1.2 Resistência e capacitor em paralelo . . . . .	224
	14.2 Circuito RL . . . . .	226
	14.2.1 Resistência e indutor em série . . . . .	226
	14.2.2 Resistência e indutor em paralelo . . . . .	227
	14.3 Aplicações dos circuitos RL e RC em série . . . . .	228
	14.4 Circuito RLC . . . . .	231
	14.4.1 Resistência, indutor e capacitor em série . . . . .	231
	14.4.2 Resistência, indutor e capacitor em paralelo . . . . .	234
	14.4.3 Ressonância . . . . .	235
<b>239</b>	<b>Capítulo 15</b>	
	<b>Circuitos trifásicos em corrente alternada</b>	
	15.1 Sistema trifásico não interligado ou independente . . . . .	240
	15.2 Sistema trifásico interligado . . . . .	241
	15.2.1 Ligação em estrela ou ípsilon ( $\Upsilon$ ) . . . . .	241
	15.2.2 Ligação em delta ou triângulo ( $\Delta$ ) . . . . .	243
	15.3 Potências em sistemas trifásicos . . . . .	243
<b>247</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	





STESHKIN YEVGENIY / SHUTTERSTOCK



DORLING KINDERSLEY / GETTY IMAGES

Réplica da garrafa de Leiden

## Descobertas fundamentais

Desde o início dos tempos, o ser humano tem contato com fenômenos elétricos da natureza. Talvez os primeiros deles tenham sido os raios, que consistem em descargas elétricas entre nuvens carregadas e a Terra, das quais resultam os eventos luminosos conhecidos como relâmpagos e os acústicos, trovões. Mesmo com a eletricidade presente na vida das pessoas e de quase tudo o que ocorre no planeta, participando do funcionamento de nosso organismo, de nossos movimentos, assim como do de todos os seres, levou muito tempo até que tivéssemos conhecimentos suficientes para classificá-la como manifestação da matéria com determinadas características que a transformaram em ciência.



FALK KIENAS / SHUTTERSTOCK

O primeiro registro do efeito atrativo da eletricidade data dos anos 600 a.C., na Grécia antiga. Tales de Mileto, considerado o primeiro físico e matemático grego, observou que o âmbar amarelo (uma resina fossilizada de árvores), depois de

### 600 a.C.

Tales de Mileto observa que o âmbar atritado com pele de carneiro atrai pequenos pedaços de palha, tecidos, penas de aves e outros materiais.

### 1745

Inventado o primeiro capacitor ou condensador, a chamada garrafa de Leiden.

### 1752

O jornalista, inventor e cientista norte-americano Benjamin Franklin realiza experimentos com raios, identificando a natureza elétrica destes e os dois tipos de carga elétrica, a positiva e a negativa.

### 1820

Primeiras experiências do francês André-Marie Ampère com a corrente elétrica.

### 1825-1827

O matemático e físico alemão Georg Simon Ohm estabelece as leis relativas à intensidade da corrente elétrica.

### 1876

Patente do telefone é concedida a Graham Bell.

### 1879

Thomas Alva Edison constrói a primeira lâmpada incandescente.



## Eletricidade animal versus eletricidade metálica

O volt (V) é uma homenagem a esse físico italiano, inventor da pilha. Ele acreditava que os tecidos dos seres vivos não eram imprescindíveis para gerar eletricidade, ao contrário de seu contemporâneo Luigi Galvani – ambos precursores dos estudos nesse campo. Formaram-se, então, duas alas de pensadores: a dos que acreditavam na “eletricidade animal” e a dos que defendiam a existência da “eletricidade metálica”.

Em 1820, o francês André-Marie Ampère realizou as primeiras experiências sobre a influência do movimento das cargas elétricas (corrente elétrica). Em 1827, publicou o resultado de várias pesquisas sobre a teoria dos circuitos elétricos. No mesmo ano, o físico alemão George Simon Ohm apresentou suas leis relativas à resistência elétrica dos condutores.

Em 1850, Gustav Robert Kirchhoff divulgou seus estudos sobre correntes e tensões em circuitos elétricos. Esses trabalhos formam a base da teoria de circuitos elétricos, utilizada nas áreas de eletricidade, eletrônica, telecomunicações, máquinas elétricas, sistemas de potência etc.

Em 1820, o físico dinamarquês Hans Christian Ørsted descobriu que a corrente elétrica produz campo magnético, observando que, quando uma corrente elétrica passava por um condutor, ocorria deflexão na agulha de uma bússola localizada em suas proximidades.

Em 1831, Michael Faraday constatou que o inverso também ocorre, ou seja, quando se faz o campo magnético nas proximidades de um condutor variar também se gera energia elétrica. Essa descoberta levou ao desenvolvimento dos geradores de corrente contínua e de corrente alternada, dos transformadores e à criação dos sistemas de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica pelas primeiras grandes empresas do setor elétrico, no final do século XIX.

Por volta de 1840, as primeiras **lâmpadas a arco** começaram a iluminar algumas cidades.

É desse período a invenção que revolucionou o uso da eletricidade: a lâmpada elétrica incandescente, a criação mais conhecida do cientista norte-americano Thomas Edison, que percebeu a necessidade de desenvolver também um sistema de geração e transmissão de energia.

Nessa época, muitos cientistas, e até leigos, voltaram seu interesse para o estudo da eletricidade, o que foi acompanhado por um crescimento vertiginoso no desenvolvimento de aplicações que fazem parte de nosso cotidiano: as transmissões de televisão, as telecomunicações, o computador, os equipamentos hospitalares, os sistemas de iluminação, os sistemas de transporte, entre outras.

Esse tipo de lâmpada produzia um arco elétrico luminoso entre duas hastes. Pouco eficientes e geradoras de calor insuportável e fumaça, foram substituídas com vantagem pelas lâmpadas incandescentes, a partir de 1880, sucedendo o lampião a gás, usado até então na iluminação pública, nas empresas e nos domicílios. Posteriormente, desenvolveram-se as lâmpadas de descarga, em que o arco ocorre dentro de um bulbo de vidro (ou quartzo) preenchido com gás (mercúrio, sódio etc.). Por sua elevada eficiência energética, essas lâmpadas vêm substituindo as incandescentes na maioria das aplicações.



SCIENCE & SOCIETY PICTURE LIBRARY/GETTY IMAGES

### 1883

Campos dos Goytacazes (RJ) é a primeira cidade brasileira a receber iluminação pública de origem elétrica.

### 1887

Primeira transmissão de ondas de rádio, por Heinrich Hertz.

### 1928

Primeira transmissão de televisão por ondas de rádio.

### 1946

Primeiro computador (ENIAC), com 18 mil válvulas e 3 toneladas.

### 1947

Invenção do transistor semicondutor.

### 1977

Computador pessoal.

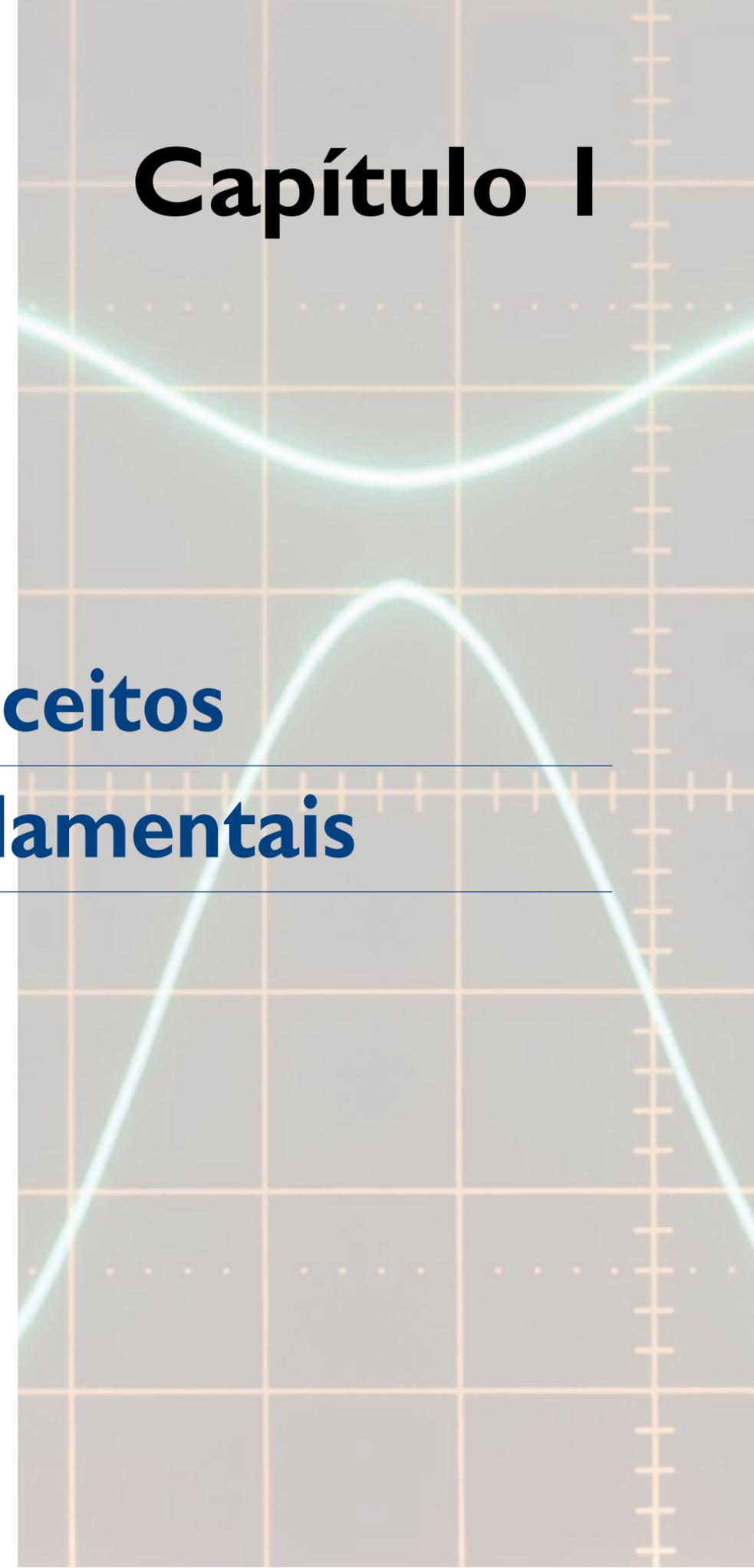
### 1991

Telefonia celular digital.



# Capítulo I

## Conceitos fundamentais



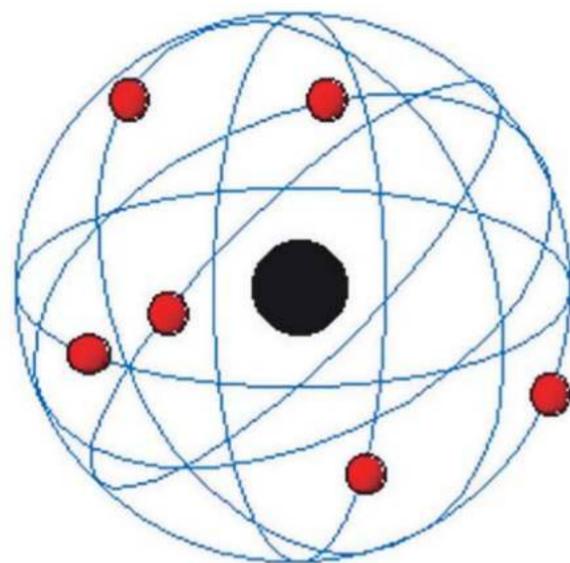
**Ernest Rutherford (1871-1937), físico e químico neozelandês, desenvolveu pesquisas sobre radiatividade que lhe renderam o Prêmio Nobel de Química de 1908.**

**James Chadwick (1891-1974), físico britânico, colaborou com Rutherford. A descoberta do nêutron lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1935.**

**D**a eletrização do âmbar, observada por Tales de Mileto, à criação do primeiro capacitor, realizaram-se muitos estudos sobre a eletricidade nos materiais. Descobriu-se que havia dois tipos de eletricidade, que se convencionou chamar de positiva e negativa, mas ainda não se dispunha de uma forma de armazená-la por tempo suficiente que viabilizasse alguma aplicação. A garrafa de Leiden resolveu esse problema e permitiu que os estudos sobre os fenômenos elétricos avançassem, introduzindo novos conceitos, como carga, campo, tensão, corrente, potência e energia, fundamentais para o entendimento dos circuitos elétricos. São esses conceitos que vamos estudar neste capítulo.

## 1.1 Modelos atômicos

O modelo atômico mais simples para entender os fenômenos elétricos é o de **Rutherford**, de 1911. A esse modelo acrescentam-se os nêutrons, descobertos por **Chadwick**, em 1932.



**Figura 1.1**  
Modelo atômico de Rutherford.

Rutherford descobriu experimentalmente que o volume do átomo é em sua maior parte vazio. No centro, encontra-se um pequenino núcleo positivo, cons-

tituído por prótons (partículas com carga elétrica positiva) e nêutrons (partículas neutras). Ao redor do núcleo, em uma região denominada eletrosfera, orbitam partículas ainda menores de carga negativa, chamadas **elétrons**.

A massa do próton é cerca de 1850 vezes maior que a do elétron.

Esse modelo atômico também é conhecido como modelo planetário, pela analogia com o sistema solar. O núcleo faz o papel do Sol, enquanto os elétrons se movem como os planetas. Em lugar da atração gravitacional, temos a força elétrica atrativa entre cargas de sinais opostos.

## 1.2 Carga elétrica

Prótons e elétrons possuem uma propriedade denominada carga elétrica, representada por **Q**. As cargas dessas partículas têm a mesma intensidade, porém sinais contrários. A unidade de medida do Sistema Internacional utilizada para quantificar a carga elétrica é o coulomb (símbolo: C), em homenagem a **Charles Coulomb**. A carga elétrica elementar, ou seja, a carga de um elétron ou de um próton vale  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

**Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), engenheiro e físico francês, realizou experiências com cargas elétricas em uma balança de torção a fim de determinar a força da natureza elétrica entre elas. Desse estudo resultou a lei que leva seu nome.**

Um átomo é considerado eletricamente neutro quando tem igual número de prótons e de elétrons. Se, por algum motivo, houver um desequilíbrio nessa igualdade numérica, o átomo passa a se chamar íon. Os íons são positivos (cátions), no caso de perda de elétrons, ou negativos (ânions), no caso de ganho de elétrons.

A carga elétrica de qualquer corpo é determinada pela diferença entre o número de elétrons e o de prótons que ele possui. Se em determinado corpo essa diferença for igual a **N**, a carga total é dada pelo produto  $N \cdot e$ , uma vez que **e** é o valor de uma carga elementar positiva ou negativa. Assim, na expressão 1.1, **Q** representa a carga elétrica total do corpo.

$$Q = Ne \quad (1.1)$$

Se o número de elétrons for maior que o de prótons, o corpo terá carga negativa; se for menor, carga positiva.

### Exemplo

Quantos elétrons um corpo neutro deve perder para que passe a ter carga elétrica igual a 1 C?

*Solução:*

Sabemos o valor da carga do elétron:  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

e da carga total do corpo:  $Q = 1 \text{ C}$

Pela equação 1.1, temos:

$$1 \text{ C} = N \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \text{ resultando } N = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ elétrons.}$$

Em expressões matemáticas, as barras representam o módulo do número entre elas. Qualquer que seja o sinal desse número, o módulo é sempre positivo. Assim,  $|8| = 8$  e  $|-8| = 8$ .



### 1.3 Campo elétrico

Antes de passar ao estudo do campo elétrico e das forças que atuam sobre as cargas, vamos fazer uma analogia com o campo gravitacional. Toda massa (por exemplo, a de um planeta) cria um campo gravitacional a seu redor, fazendo com que outras massas sejam atraídas por ela (todos os corpos são atraídos para o centro da Terra). Da mesma forma, cargas elétricas produzem campos elétricos em torno de si, de tal maneira que outra carga elétrica que esteja nesse campo sofrerá repulsão (se ambas tiverem o mesmo sinal) ou atração (se os sinais forem diferentes). Tais forças entre as cargas, no caso, têm natureza elétrica, e entre as massas, natureza gravitacional.

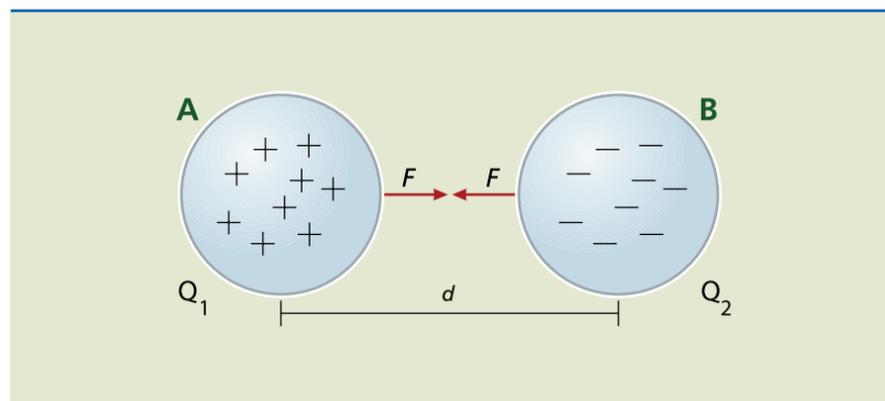
Assim como as massas imersas em campo gravitacional estão sujeitas a uma força gravitacional, as cargas elétricas no interior de um campo elétrico também sofrem a ação de forças de natureza elétrica.

No caso de duas massas, cada uma cria o próprio campo gravitacional. Portanto, quando próximas, ambas estão sob a ação de forças atrativas, cujas intensidades são iguais e de sentidos opostos.

Analogamente, se tivermos dois corpos A e B carregados com cargas elétricas de sinais diferentes (figura 1.2), teremos B imerso no campo elétrico gerado por A, sujeito a uma força atrativa  $F$ , de direção horizontal e sentido para a esquerda. A carga de A, que está imersa no campo elétrico produzido por B, está sujeita a uma força de mesma intensidade  $F$  e direção horizontal, mas com sentido para a direita.

Experimentalmente, verifica-se que cargas de polaridades diferentes se atraem, enquanto cargas de mesmo sinal se repelem.

**Figura 1.2**  
Força elétrica entre dois corpos carregados.



A intensidade da força elétrica de atração (entre cargas de sinais contrários) ou de repulsão (entre cargas de mesmo sinal) é dada pela expressão algébrica da lei de Coulomb.

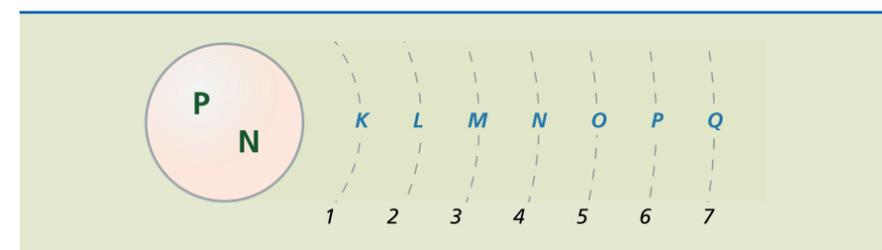
$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2} \quad (1.2)$$

em que:

- $F$  é a intensidade da força de interação elétrica entre  $Q_1$  e  $Q_2$ , medida em newtons (N);
- $Q_1$  e  $Q_2$  as cargas elétricas de cada corpo, medidas em coulombs (C);
- $d$  a distância entre os centros de massa de  $Q_1$  e  $Q_2$ , medida em metros (m);
- $k$  a constante de proporcionalidade do meio

(para o vácuo,  $k = k_0 = 9,00 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ ).

No modelo planetário de Rutherford, os elétrons de um átomo se distribuem em órbitas circulares, conhecidas também por camadas (K, L, M, N...), como mostra a figura 1.3. Os elétrons da última camada, por estarem mais distantes, estão sujeitos a menor força de atração e podem ser facilmente retirados do átomo.



**Figura 1.3**  
Órbitas descritas pelos elétrons de um átomo no modelo de Rutherford.

### 1.4 Processos de eletrização

Há três maneiras de eletrizar um corpo: por atrito, por contato ou por indução. No experimento descrito a seguir ocorrem os três tipos de eletrização (figuras 1.4a a 1.4d). Para reproduzi-lo, bastam um pente, cabelo e papel picado.

**Figura 1.4a**  
De início, o cabelo, o pente e o papel estão eletricamente neutros.



Ao passar o pente no cabelo (atrito), ocorre a transferência de cargas entre os dois elementos. O pente agora tem excesso de cargas negativas e o cabelo, de cargas positivas (figura 1.4b), dando origem, assim, a campos elétricos.



**Figura 1.4b**

Processo de eletrização por atrito.



VALUA VITALY / SHUTTERSTOCK

Ao aproximar o pente eletrizado dos pedaços de papel, o campo elétrico do pente age sobre as cargas do papel, provocando a separação entre elas. As cargas positivas se concentram na parte superior dos pedaços de papel, por atração, enquanto as negativas são repelidas para a parte inferior.

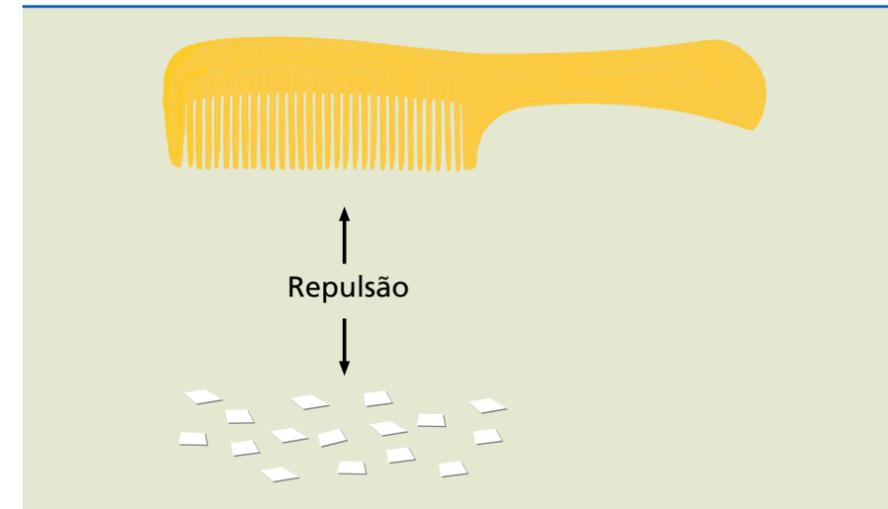
**Figura 1.4c**

Indução de cargas elétricas no papel (atração).



ALAMY/OTHER IMAGES

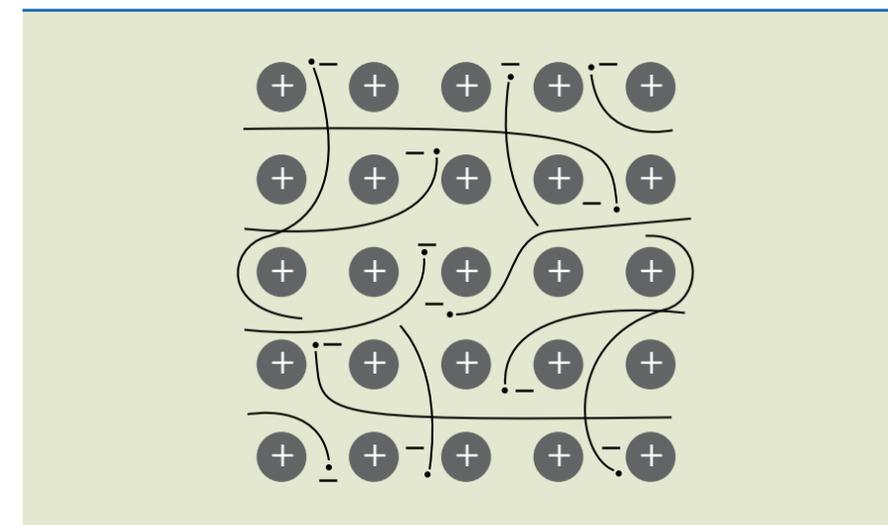
A polarização dá origem a uma atração entre o pente e o papel, até ocorrer o contato entre eles. Após o contato, alguns elétrons do pente se transferem para o papel, de modo que a distribuição espacial das cargas atinge o equilíbrio. Esses elétrons neutralizam algumas das cargas positivas dos pedaços de papel, o qual se torna negativo. Nessa situação, papel e pente estão negativamente carregados, o que provoca a repulsão entre eles (figura 1.4d).

**Figura 1.4d**

Após o contato, ocorre repulsão entre o pente e o papel.

## 1.5 Elementos condutores, semicondutores e isolantes

Os metais podem ter um, dois ou três elétrons em sua última camada. O cobre, um dos condutores mais utilizados, possui um elétron na última camada, e o alumínio, três. Esses elétrons estão fracamente ligados ao átomo, o que lhes permite movimentar-se livremente na rede cristalina do metal, vagando de um átomo para outro. Por isso, são chamados elétrons livres. Eles podem ser arrancados do átomo pela ação de um campo elétrico externo. É essa característica que torna os metais bons condutores.

**Figura 1.5**

Rede cristalina de um metal: os elétrons da última camada vagam livremente entre os átomos.

Os semicondutores, como o silício e o germânio, têm quatro elétrons na última camada e podem se comportar como condutores ou isolantes, dependendo de como os átomos se ligam a seus vizinhos (estrutura cristalina).



Elementos com a última camada completa, como os gases nobres, são elementos isolantes.

Essas considerações são válidas apenas para os elementos. Nas substâncias, formadas por diversos elementos, a condução elétrica depende de como ocorrem as ligações interatômicas nas moléculas, que não serão discutidas neste livro.

É importante observar também que um isolante pode se tornar condutor, caso esteja sujeito a um campo elétrico muito intenso.

## 1.6 Grandezas elétricas, unidades, notação e prefixos

Em praticamente todos os casos vamos trabalhar com as grandezas elétricas expressas em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). A maioria leva o nome de grandes cientistas, por exemplo: V, para volt (em homenagem a Alessandro Volta); A, para ampère (André Marie Ampère); e W, para watt (James Watt). Note que volt, ampère e watt são grafados com letras minúsculas, e seus símbolos, em maiúscula. As regras para a grafia correta das unidades e seus símbolos são encontradas no *site* do Inmetro (<http://www.inmetro.gov.br/consumidor/unidLegaisMed.asp>). O nome da grandeza deve ser grafado no plural quando for o caso (1 volt, 2 volts), enquanto o símbolo permanece sempre no singular e sem ponto no final (1 V, 2 V, e não 2 Vs).

Serão usadas, ainda, potências de 10 para a descrição das grandezas, porque assim é possível trabalhar de maneira mais confortável com valores muito grandes ou muito pequenos. Deve-se também ter cuidado em respeitar o uso de maiúscula ou minúscula nos prefixos, cujas regras para a grafia correta são encontradas na mesma página do Inmetro citada no parágrafo anterior.

### Prefixos das unidades SI

Múltiplos:

$$k = \text{quilo} = 1\,000 = 10^3$$

$$M = \text{mega} = 1\,000\,000 = 10^6$$

$$G = \text{giga} = 1\,000\,000\,000 = 10^9$$

$$T = \text{tera} = 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$$

Submúltiplos:

$$m = \text{mili} = 0,001 = 10^{-3}$$

$$\mu = \text{micro} = 0,000\,001 = 10^{-6}$$

$$n = \text{nano} = 0,000\,000\,001 = 10^{-9}$$

$$p = \text{pico} = 0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$$

Ao escrever uma equação em textos matemáticos e técnicos, é usual o emprego de letras gregas. A tabela 1.1 mostra o alfabeto grego e o nome de cada letra.

**Tabela 1.1**  
Alfabeto grego

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	$\alpha$	A
beta	$\beta$	B
gama	$\gamma$	$\Gamma$
delta	$\delta$	$\Delta$
épsilon	$\epsilon$	E
dzeta ou zeta	$\zeta$	Z
eta	$\eta$	H
teta	$\theta$	$\Theta$
iota	$\iota$	I
capa	$\kappa$	K
lambda	$\lambda$	$\Lambda$
mi	$\mu$	M
ni	$\nu$	N
csi	$\xi$	$\Xi$
ômicron	$\omicron$	O
pi	$\pi$	$\Pi$
rô	$\rho$	P
sigma	$\sigma$	$\Sigma$
tau	$\tau$	T
ípsilon	$\upsilon$	Y
fi	$\phi$	$\Phi$
qui ou chi	$\chi$	X
psi	$\psi$	$\Psi$
ômega	$\omega$	$\Omega$



### 1.7 Tensão elétrica (U) ou diferença de potencial (ddp)

Uma carga imersa em um campo elétrico fica sujeita a uma força e pode vir a se movimentar. Em outras palavras, essa carga adquire uma energia potencial elétrica  $\epsilon_p$ , que pode ser transformada em energia de movimento (cinética), ou seja, pode realizar trabalho. Quanto maior a carga, maior a força e maior a energia potencial  $\epsilon_p$ .

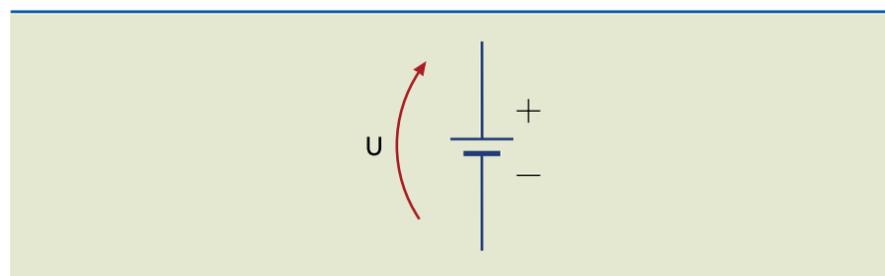
O fator  $\epsilon_p/Q$  indica a quantidade de energia por unidade de carga. Essa razão é conhecida como potencial elétrico. Observe que é possível calcular o potencial em cada ponto do campo elétrico. Sua unidade é o joule/coulomb (J/C), batizado de volt (V).

Particularmente importante é a definição de tensão ou diferença de potencial (ddp) entre dois pontos. Dados dois pontos A e B, com potenciais  $V_A$  e  $V_B$  respectivamente, define-se tensão entre os pontos A e B ou diferença de potencial entre os pontos A e B como:

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (1.3)$$

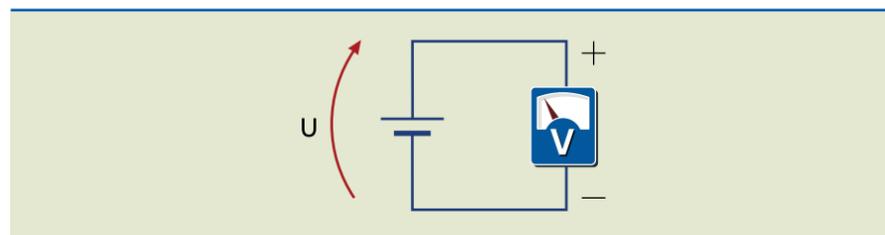
Em circuitos elétricos, a diferença de potencial é imposta por geradores ou baterias. A figura 1.6 ilustra o símbolo de um gerador de tensão contínua, com a ponta da flecha; o traço maior do símbolo indica o ponto de maior potencial (terminal positivo, +).

**Figura 1.6**  
Representação da diferença de potencial em um gerador de tensão.

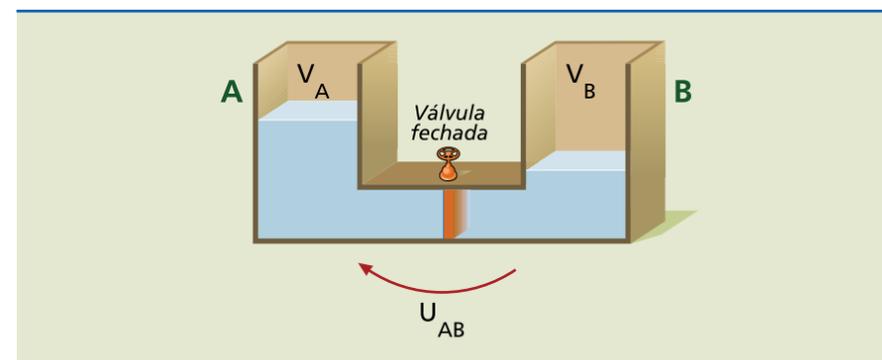


Os instrumentos de medida em eletricidade, na maioria das vezes, recebem o nome de acordo com a grandeza mensurada. Assim, o instrumento que mede a tensão elétrica é o voltímetro, que deve ser ligado em paralelo com o elemento a ser medido (figura 1.7). No caso de um sinal contínuo, é preciso prestar atenção à polaridade das pontas de prova.

**Figura 1.7**  
Representação de um voltímetro medindo a diferença de potencial entre os terminais do gerador.



A analogia com um sistema hidráulico é bastante útil para entender o significado da tensão elétrica. A figura 1.8 ilustra dois reservatórios de água interligados a um registro: o reservatório A está cheio de água, enquanto o B permanece vazio.

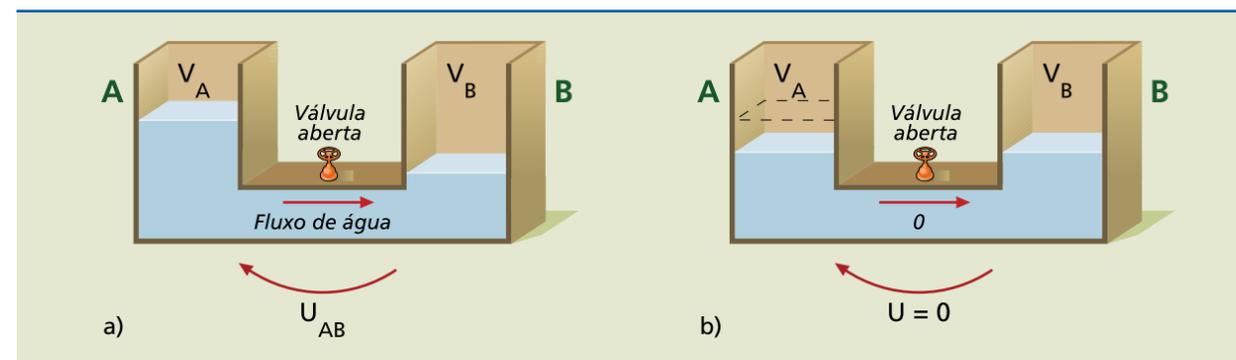


**Figura 1.8**  
Reservatórios cheio (A) e vazio (B).

O lado esquerdo da válvula está sujeito à pressão da coluna de água no reservatório A (análogo ao potencial no terminal positivo da bateria). O lado direito da válvula tem apenas a pressão atmosférica (equivalente ao potencial no terminal negativo da bateria), que é muito menor que a pressão no lado esquerdo da válvula.

Quando se abre a válvula, a água sai do reservatório A em direção ao B, até que o nível nos dois reservatórios fique exatamente o mesmo, ou seja, deixa de existir a diferença de pressão (diferença de potencial) entre eles (figura 1.9).

**Figura 1.9**  
(a) Fluxo de água e  
(b) nivelamento dos reservatórios de água.



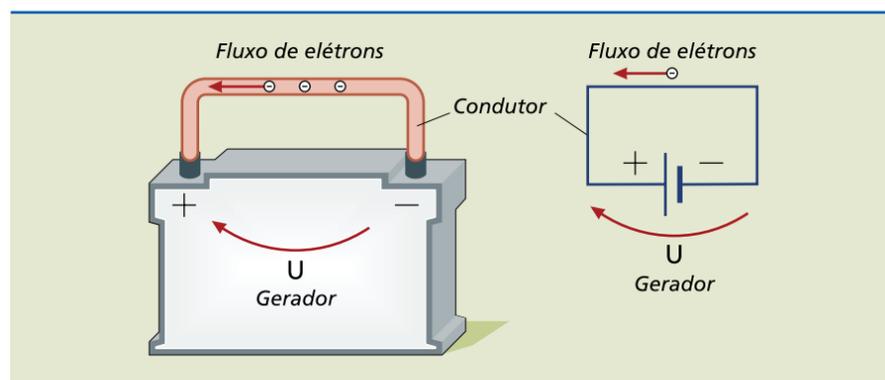
### 1.8 Corrente elétrica

Ao conectarmos um fio aos terminais do gerador da figura 1.10, os elétrons circularão do terminal negativo ao positivo, sob o efeito da diferença de potencial entre ambos. O fluxo de elétrons, chamado de corrente elétrica, é análogo ao fluxo de água (vazão) entre os reservatórios sob a ação da diferença de pressão entre eles. O fluxo de elétrons continua até que a diferença de potencial entre os terminais da bateria seja nula.

Assim como a vazão de água é medida em litros por segundo, a vazão de elétrons, ou seja, a corrente, é medida em termos da quantidade de carga, em coulombs, que atravessa o condutor por segundo, também denominada ampère (A).



**Figura 1.10**  
Corrente elétrica imposta pela tensão  $U$ .



Para calcular a intensidade da corrente, basta dividir a quantidade de carga  $\Delta Q$  que passa por uma seção reta do condutor pelo intervalo de tempo  $\Delta t$  (equação 1.4).

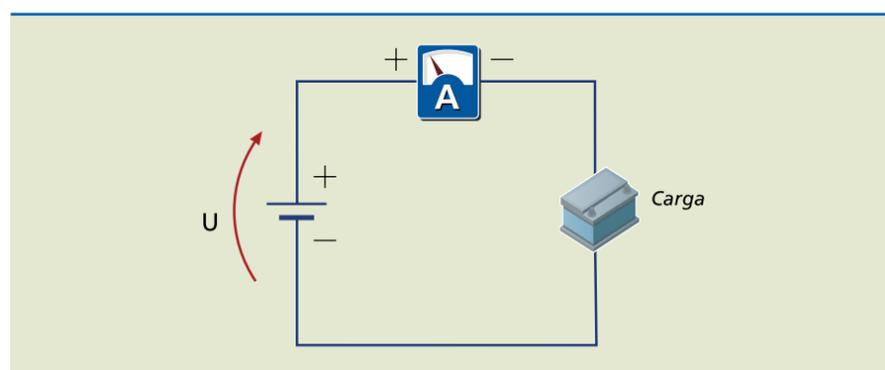
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Assim, 1 ampère corresponde ao fluxo de 1 coulomb a cada segundo, ou seja:

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

O instrumento de medida de corrente elétrica é o amperímetro. Para “contar” quantos elétrons passam por segundo, ele deve ser intercalado em série com o circuito (figura 1.11).

**Figura 1.11**  
Amperímetro intercalado no circuito.

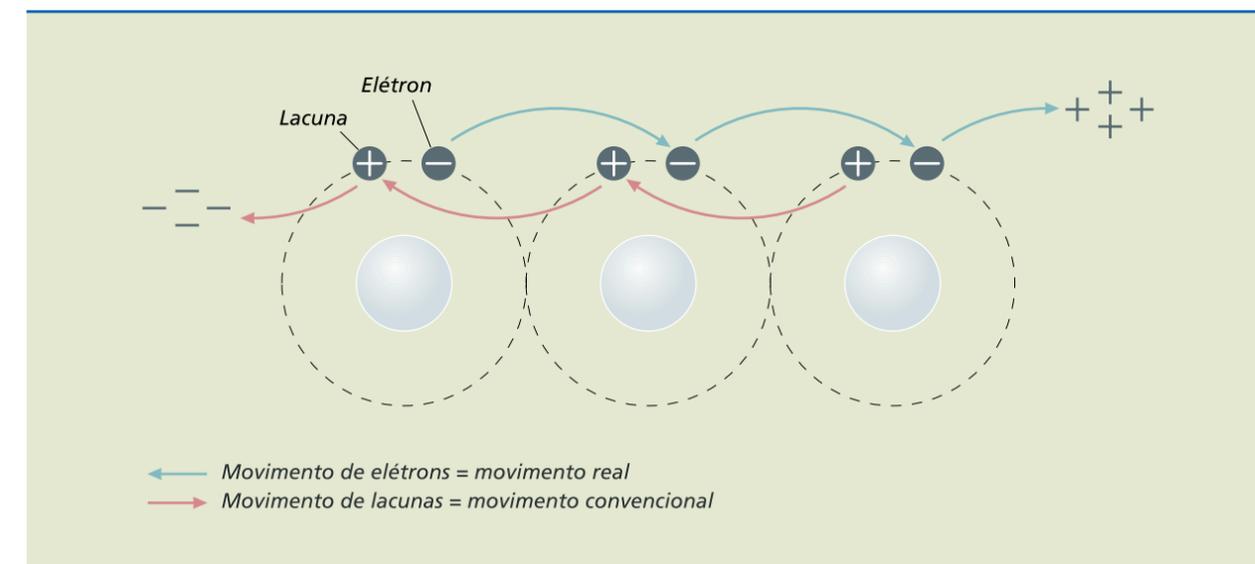


### 1.8.1 Sentido da corrente

O sentido real da corrente elétrica corresponde ao movimento dos elétrons saindo do terminal negativo do gerador em direção ao terminal positivo (figura 1.12). Na prática, porém, adota-se o sentido convencional de corrente, que é o oposto do sentido real, ou seja, sai do terminal positivo em direção ao negativo. Isso ocorre porque, no passado, acreditava-se que as cargas positivas eram as que se moviam, ideia eliminada com o avanço das pesquisas na área.

Alternativamente, podemos imaginar que o sentido convencional corresponde ao movimento das lacunas. A saída de um elétron da última camada do átomo dá origem a uma lacuna (carga elétrica “fictícia” positiva), que se movimentaria no sentido contrário ao dos elétrons, conforme ilustrado na figura 1.12.

**Figura 1.12**  
Movimento de elétrons (movimento real); movimento de lacunas (movimento convencional).



### 1.8.2 Efeitos da corrente elétrica

A corrente elétrica não é visível, mas podemos perceber claramente seus efeitos.

- **Efeito térmico** – Também conhecido como efeito Joule, ocorre devido à colisão dos elétrons em movimento (livres) com átomos do condutor. Os átomos recebem parte da energia cinética proveniente do movimento dos elétrons e acabam aumentando sua vibração (agitação térmica) dentro do condutor, o que equivale a aumento em sua temperatura. De modo simplificado, pode-se dizer que o efeito Joule é a transformação de energia elétrica em calor. Alguns exemplos de aplicação do efeito são o chuveiro, o ferro elétrico e as lâmpadas incandescentes, cujo filamento chega a 3000 °C, emitindo luz.
- **Efeito químico** – Ocorre quando a corrente elétrica passa por certas soluções, contribuindo para a reação química. Alguns exemplos de utilização na indústria são a eletrólise, aplicada na separação de gases, purificação do alumínio etc., e a galvanização, em que se realiza o recobrimento de materiais com prata, ouro e cromo.
- **Efeito magnético** – Ocorre quando a passagem da corrente elétrica por um condutor dá origem a um campo magnético a seu redor. Esse efeito é a base para o funcionamento de transformadores, motores, geradores etc.
- **Efeito luminoso** – A corrente elétrica circulando em um recipiente no qual há gases metálicos (mercúrio, sódio) provoca emissão de luz, como acontece com a lâmpada fluorescente.
- **Efeito fisiológico** – Ao passar através dos seres vivos, a corrente pode causar diferentes efeitos, dependendo da intensidade, da duração e do caminho que



**Tabela 1.2**  
Efeitos da corrente elétrica no corpo humano.

ela percorre nos tecidos. Pode ocorrer desde formigamento até contração e paralisia muscular, perda de consciência, asfixia, queimaduras etc., conforme descrito na tabela 1.2.

Corrente elétrica* (60 Hz)	Duração	Efeitos mais graves**
0 a 0,5 mA	Qualquer	Nenhum
0,5 a 2 mA	Qualquer	Limiar de percepção
2 a 10 mA	Qualquer	Dor Contração muscular Descontrole muscular
10 a 25 mA	Minutos	Contração muscular Dificuldade respiratória Aumento da pressão arterial
25 a 50 mA	Segundos	Paralisia respiratória Fibrilação ventricular Inconsciência
50 a 200 mA	Mais de um ciclo cardíaco	Fibrilação ventricular Inconsciência Paralisia respiratória Marcas visíveis
Acima de 200 mA	Menos de um ciclo cardíaco	Fibrilação ventricular Inconsciência Marcas visíveis
Acima de 200 mA	Mais de um ciclo cardíaco	Parada cardíaca reversível Inconsciência Queimaduras

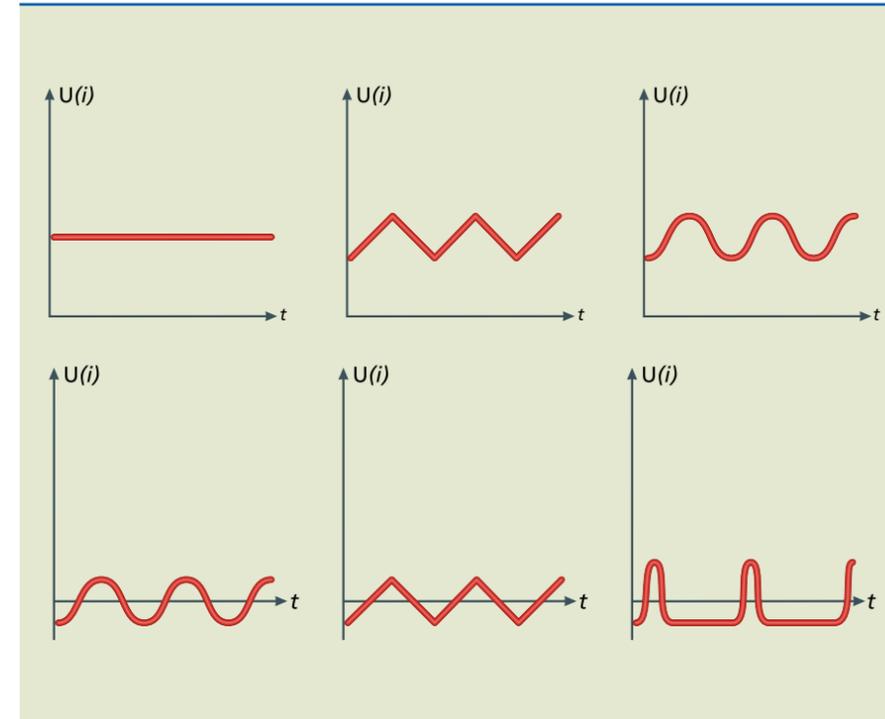
\* As faixas de valores para a corrente elétrica são muito aproximadas e devem praticamente ser consideradas como ordens de grandeza.

\*\* Grande probabilidade de ocorrência.

Fonte: GREF. Física 3: eletromagnetismo. 3. ed. São Paulo: Edusp, 1998, p. 348.

### 1.9 Tensão (corrente) contínua/alternada

Os sinais das tensões e correntes podem ser classificados em contínuos e alternados. O sinal contínuo não muda sua polaridade ao longo do tempo. A figura 1.13 é um esboço dos gráficos, sem unidades, dos sinais contínuos de tensão ou corrente, característicos dos geradores químicos, como pilhas e baterias. O sinal alternado muda sua polaridade periodicamente ao longo do tempo. Um exemplo é a tensão fornecida na rede elétrica das grandes cidades.



**Figura 1.13**  
Gráficos de tensão e corrente elétrica alternadas.

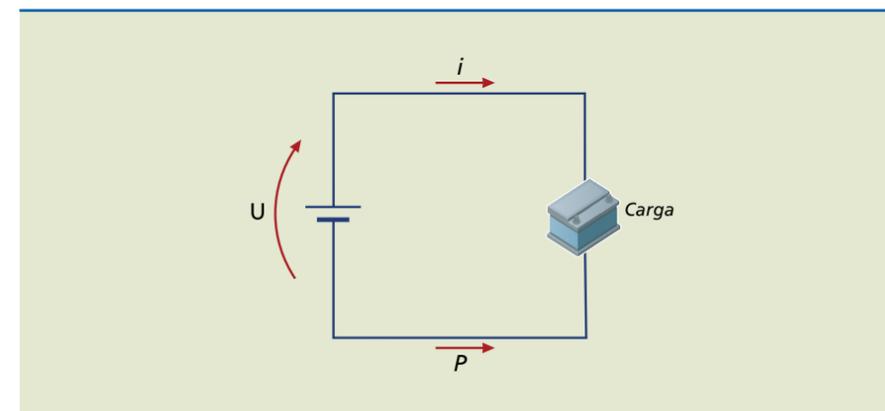
### 1.10 Potência elétrica (P)

A potência elétrica  $P$  indica quanto trabalho  $\epsilon$  (ou energia) é realizado em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , conforme descrito na equação 1.5.

$$P = \frac{\epsilon}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Também pode ser calculada pelo produto da tensão  $U$  e da corrente  $I$  no circuito. Na figura 1.14, tanto a potência fornecida pelo gerador (com tensão  $U$  em seus terminais e fornecendo uma corrente  $I$ ) como a consumida pela carga (com tensão  $U$  em seus terminais e consumindo uma corrente  $I$ ) são definidas pela equação 1.6.

$$P = UI \quad (1.6)$$



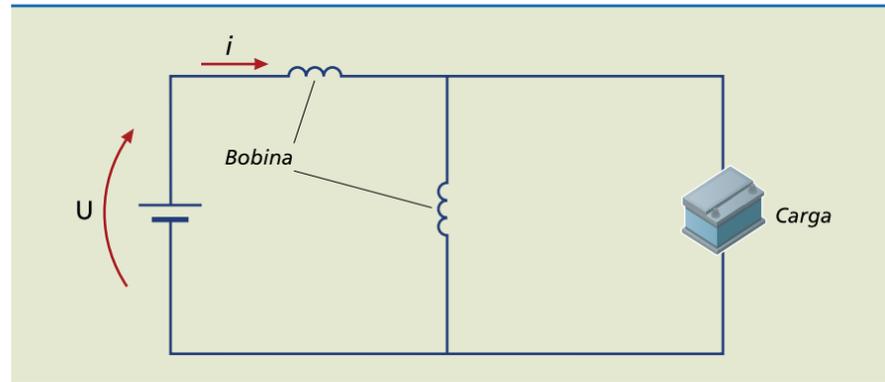
**Figura 1.14**  
Esquema de gerador e carga.



**James Watt (1736-1819)**, matemático e engenheiro escocês, destacou-se pela construção de máquinas térmicas a vapor e pesquisas sobre o rendimento de motores, que deram grande impulso à mecanização no período da Revolução Industrial.

A unidade de medida da potência é o watt (W), termo adotado em homenagem ao cientista escocês **James Watt**. De acordo com a equação 1.5, a potência também pode ser expressa em joule por segundo (J/s).

Para medir a potência, usa-se o wattímetro (figura 1.15), instrumento que mede simultaneamente a corrente e a tensão no gerador ou na carga. Para tanto, o dispositivo tem dois pares de terminais – um para medir a corrente (portanto, deve ficar em série com o circuito, para que seja atravessado por ela) e outro para medir a tensão –, que são conectados aos terminais da fonte ou da carga.



**Figura 1.15**  
Wattímetro conectado ao circuito.

## 1.11 Energia elétrica ( $\epsilon$ )

Rearranjando os termos da expressão 1.5, podemos obter a energia elétrica:

$$\epsilon = P \cdot \Delta t \quad (1.7)$$

Sua unidade de medida é o watt-segundo ( $W \cdot s$ ) ou o joule (J).

O instrumento que mede a energia elétrica consumida é o medidor de consumo (figura 1.16), mais conhecido como “relógio”, instalado na entrada de residências, lojas, indústrias etc. Como o período de medição utilizado é geralmente mensal, para diminuir o valor numérico da grandeza medida, usa-se um múltiplo, o quilowatt-hora (kWh), que corresponde a  $3,6 \cdot 10^6$  J.

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$



**Figura 1.16**  
Medidor de luz residencial.

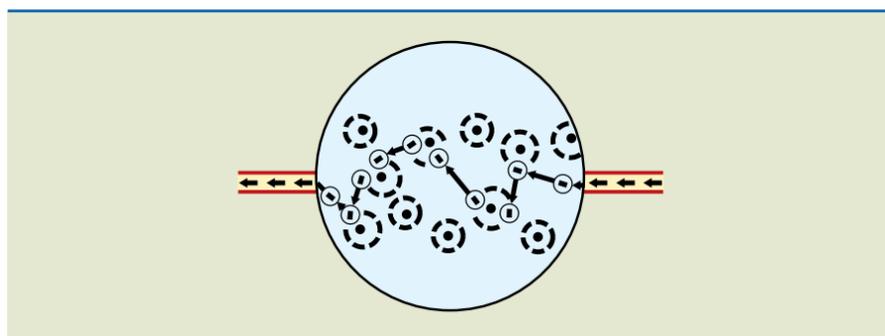
# Capítulo 2

## Resistência elétrica



Quando se estabelece uma tensão entre os terminais de um condutor, o campo elétrico gerado pela tensão provoca o movimento ordenado dos elétrons livres, ou seja, uma corrente elétrica. Esses elétrons, em seu deslocamento, chocam-se com os átomos do condutor, resultando na produção de calor (figura 2.1). Os átomos de alguns condutores oferecem maior resistência à passagem da corrente que outros e, nesse caso, produz-se mais calor. Tal propriedade física dos condutores é chamada de resistência elétrica.

**Figura 2.1**  
Elétrons livres em movimento chocam-se com os átomos do condutor, produzindo calor.



Em outras palavras, parte da energia fornecida ao fio é transformada em energia elétrica (energia de movimento dos elétrons) e parte, em energia térmica. Essa conversão em calor é conhecida como efeito Joule. Quanto mais alto o valor da resistência elétrica do condutor, maior a oposição à passagem da corrente e maior a quantidade de calor dissipado.

Essa unidade foi adotada em homenagem ao cientista alemão George Simon Ohm, que formulou a lei relacionando tensão, resistência e corrente elétrica em um elemento de circuito.

## 2.1 Resistores

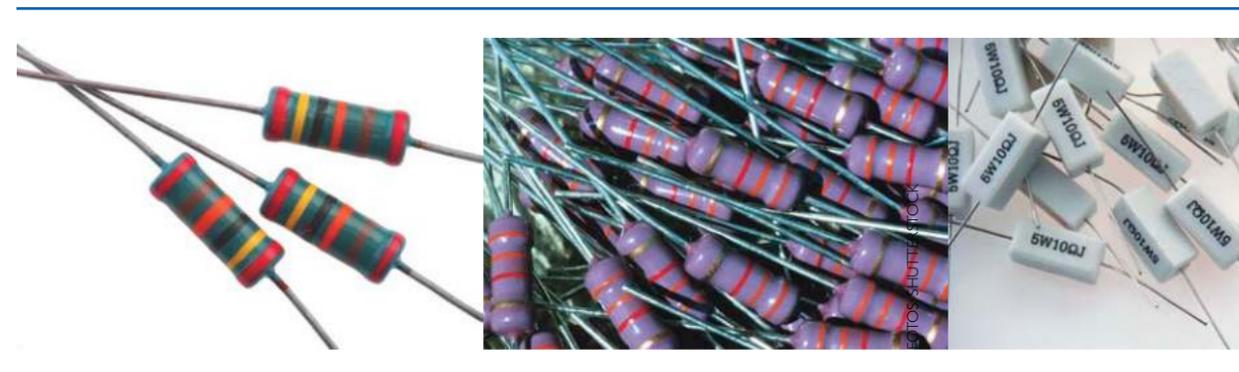
A resistência elétrica depende do material, das dimensões do condutor e da temperatura (agitação térmica). Sua unidade de medida no SI é o **ohm**, de símbolo  $\Omega$ .

Em muitos casos práticos, deseja-se que o valor da resistência seja o menor possível, para reduzir a dissipação de energia – por exemplo, nos condutores empregados em redes elétricas, transformadores e motores.

Em outras aplicações, como nos circuitos eletrônicos, deseja-se limitar a corrente em um valor estipulado. Nesse caso, utiliza-se um componente especialmente destinado a esse fim, o resistor. Trata-se de um elemento físico cuja característica principal é a resistência elétrica.

Os resistores podem ser construídos com fio, filme de carbono, filme metálico etc. A figura 2.2 ilustra alguns tipos de resistores disponíveis comercialmente.

**Figura 2.2**  
Diversos tipos de resistor.



Em outros casos, deseja-se transformar energia elétrica em térmica, como no chuveiro, no forno elétrico e no secador de cabelos. Esses elementos também são denominados resistores, mas comercialmente costumam ser chamados de elementos de aquecimento ou de “resistências”. É comum dizermos que a resistência do chuveiro “queimou”, o que pode causar certa confusão, pois a resistência é uma propriedade, e não um dispositivo.



**Figura 2.3**  
Elementos para chuveiro  
Elemento para estufa  
Resistores para aquecimento.

Outra importante característica de um resistor é a potência máxima dissipada. Resistores de carbono e filme metálico são encontrados na faixa de 0,1 a 1 W; resistores de fio estão na faixa de 5 a 100 W; e resistores de aquecimento para uso residencial se situam entre 1 e 5 kW.



**Figura 2.4**  
Potenciômetro  
(resistor variável).



O termo *trimpot* vem da junção das palavras inglesas *trimmer* e *potenciometer*.

Algumas aplicações exigem que o valor da resistência do resistor seja variado. Em aplicações eletrônicas de baixa potência, elementos que permitem tal variação são encontrados na forma de potenciômetros como o da figura 2.4, usado para o controle de volume em sistemas de som antigos, em que o operador tinha acesso a seu eixo.

Há também os *trimpots* (figura 2.5), utilizados para ajustes no circuito eletrônico, não acessíveis ao operador.

**Figura 2.5**  
Diversos tipos de *trimpot* (resistor variável).



FOTOS: WALTER JOSÉ MIGUEL

Outro dispositivo que possibilita a variação da resistência é o reostato (figura 2.6), de elevada potência.

**Figura 2.6**  
Tipo de reostato.

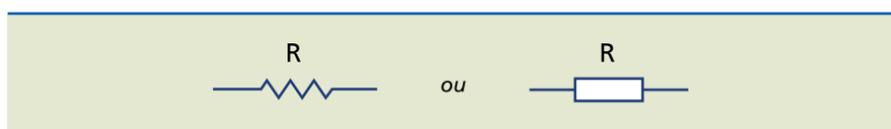


WIKIPEDIA.ORG

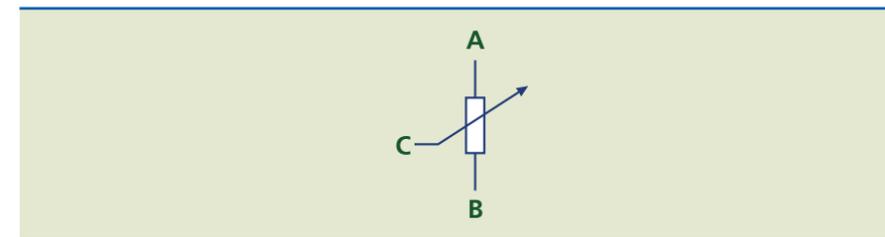
### 2.1.1 Simbologia

Em qualquer um dos casos descritos, o resistor é representado em um circuito por um dos símbolos gráficos mostrados na figura 2.7.

**Figura 2.7**  
Representação gráfica de uma resistência fixa.



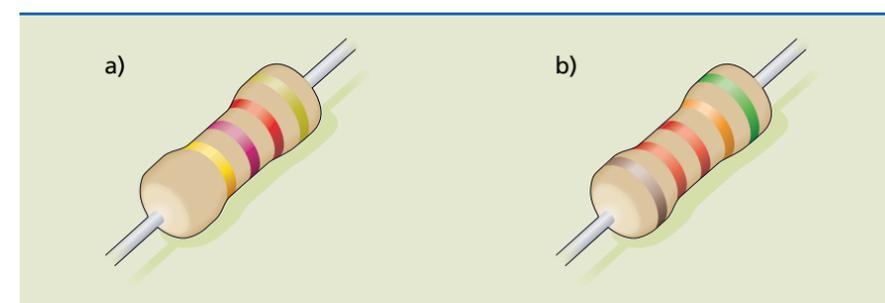
Os potenciômetros e os *trimpots* são dispositivos de três terminais, dois para o resistor e um para o cursor, e são representados graficamente como ilustrado na figura 2.8.



**Figura 2.8**  
Representação gráfica de potenciômetros e *trimpots*.

### 2.1.2 Código de cores dos resistores

Os resistores com maiores dimensões têm a indicação da resistência e da potência no próprio corpo (resistores de fio). Outros, de menor potência, utilizam apenas um código de cores para indicar seu valor. O código de cores consiste em quatro ou cinco anéis coloridos impressos no corpo do resistor (figura 2.9).



**Figura 2.9**  
Código de cores para resistores: sistemas de (a) quatro anéis e (b) cinco anéis.

A tabela 2.1 apresenta o valor e a tolerância dos anéis segundo a cor.

Cores	Valor (1º ao 3º anel)	Tolerância (4º ou 5º anel)
Preto	0 (menos 1º anel)	
Marrom	1	1%
Vermelho	2	2%
Laranja	3	
Amarelo	4	
Verde	5	0,5% (apenas 5º anel)
Azul	6	
Roxo/lilás/violeta	7	
Cinza	8	
Branco	9	
Ouro	-1 (apenas 3º anel)	5%
Prata	-2 (apenas 3º anel)	10% (não mais fabricado)

**Tabela 2.1**  
Código de cores de anéis



No sistema de quatro anéis, a leitura é dada pela fórmula:

$$\text{Leitura} = (AB \cdot 10^C \pm D) \Omega \quad (2.1)$$

em que:

- A é o primeiro anel = primeiro algarismo;
- B o segundo anel = segundo algarismo;
- C o terceiro anel = algarismo multiplicador = número de zeros;
- D quarto anel = tolerância.

Para o resistor da figura 2.9a, consultando a tabela 2.1, temos:

- A: vermelho = 2.
- B: verde = 7.
- C: vermelho = 2.
- D: ouro = 5%.

Pela fórmula 2.1, obtemos:

$$R = 27 \cdot 10^2 \Omega \pm 5\% = 2\,700 \Omega \pm 5\% = 2,7 \text{ k}\Omega \pm 5\%$$

Na prática, o valor 2,7 k $\Omega$  também é grafado como 2k7  $\Omega$ .

Nesse caso, há uma resistência nominal de 2,7 k $\Omega$  e tolerância de 5%. Cinco por cento de 2,7 k $\Omega$  é  $2\,700 \cdot 5/100 = 0,135 \text{ k}\Omega$ . Isso indica que o valor real do resistor deverá estar na faixa compreendida entre  $R_{\min} = 2\,700 - 0,135 = 2,565 \text{ k}\Omega$  e  $R_{\max} = 2,7 + 0,135 = 2,835 \text{ k}\Omega$ .

Os dispositivos com tolerância menor ou igual a 1% são denominados resistores de precisão. Eles possuem cinco faixas, mostradas na figura 2.9b. Nesse caso, três algarismos significativos (ABC) são utilizados. Para o sistema de cinco anéis, a leitura é dada pela fórmula:

$$\text{Leitura} = (ABC \times 10^D \pm E) \Omega \quad (2.2)$$

em que:

- A é o primeiro anel = primeiro algarismo;
- B o segundo anel = segundo algarismo;
- C o terceiro anel = terceiro algarismo;
- D o quarto anel = algarismo multiplicador = número de zeros;
- E o quinto anel = tolerância.

Para o resistor da figura 2.9b, consultando o código de cores, obtemos:

- A: laranja = 3.
- B: laranja = 3.
- C: branco = 9.

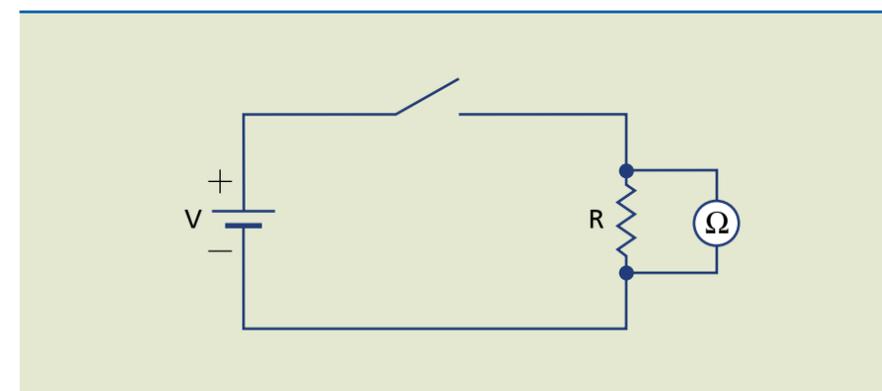
- D: preto = 0.
- E: marrom = 1%.

Nesse caso, a resistência do resistor é:

$$R = 339 \cdot 10^0 \Omega \pm 1\% = 339 \text{ k}\Omega \pm 0,5\%$$

### 2.1.3 Medição da resistência

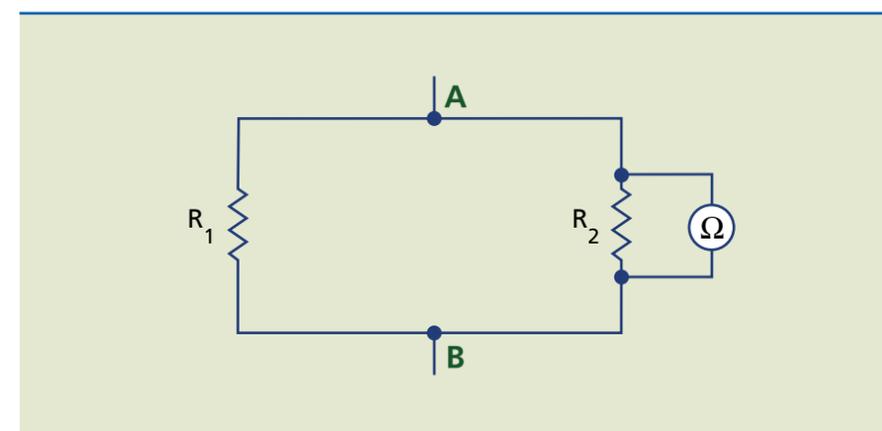
O instrumento que mede a resistência elétrica de um dispositivo ou circuito é o ohmímetro. O aparelho deve ser conectado em paralelo à resistência a ser medida, conforme ilustrado na figura 2.10. O componente sob medição não poderá em hipótese alguma estar energizado, a fim de evitar danos ao instrumento. Note que nessa figura a fonte está desconectada do resistor.



**Figura 2.10**

Ligação do ohmímetro ao resistor sob medição.

Mesmo com o circuito desenergizado, deve-se tomar o cuidado de verificar se não existem outros componentes conectados ao resistor sob medição. No caso da figura 2.11, o ohmímetro está indicando a leitura das duas resistências em paralelo e não apenas de  $R_2$ , à qual está conectado.



**Figura 2.11**

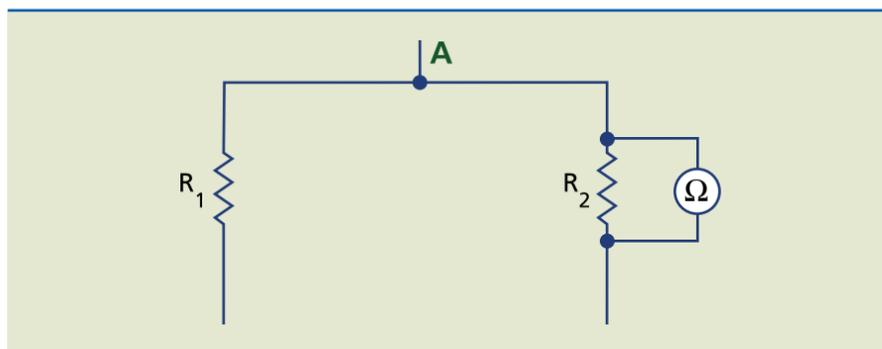
Exemplo de erro de leitura: outros componentes estão conectados a  $R_2$ .

Caso se queira medir apenas  $R_2$ , ela deverá ser desconectada das demais, como ilustrado na figura 2.12.



**Figura 2.12**

Medição da resistência  $R_2$ .



## 2.2 Lei de Ohm

Em 1826, o físico alemão Georg Simon Ohm realizou vários experimentos para verificar a relação entre tensão, corrente e resistência elétrica em resistores.

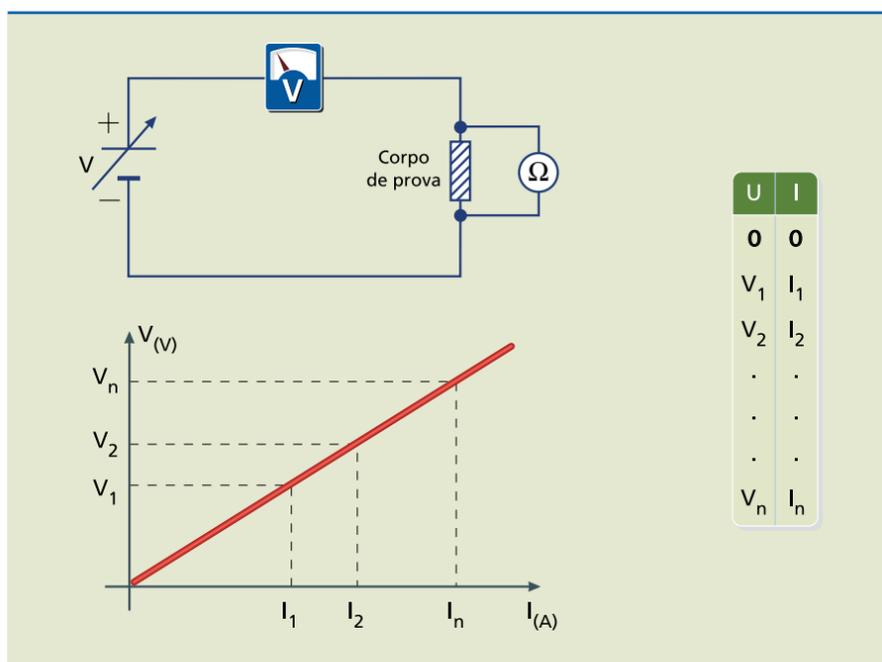
Em uma das experiências, indicada na figura 2.13, ele variou a tensão  $V$  aplicada a um condutor e anotou a corrente  $I$  que circulava. Traçando o gráfico  $V \cdot I$ , notou que, para alguns materiais, o resultado era uma reta. Nesse caso, o ângulo  $\alpha$  entre a reta e o eixo horizontal é constante e, portanto, vale o mesmo para seu coeficiente angular  $\tan \alpha$  (equação 2.3).

$$\tan \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_3}{I_3} = \dots = \text{cte} = R \quad (2.3)$$

Ao quociente entre tensão e corrente, que é constante para cada valor de tensão, denomina-se resistência ôhmica.

**Figura 2.13**

Circuito sob tensão variável. A tabela indica os diferentes valores da corrente à medida que a tensão varia. O gráfico mostra que a razão entre os valores da tensão e da corrente é constante. Essa constante é a resistência ôhmica do corpo de prova.



Pode-se, assim, enunciar a lei de Ohm como:

“A corrente que flui por um resistor é proporcional à tensão aplicada e inversamente proporcional ao valor de sua resistência”.

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.4)$$

Voltando à analogia com o sistema hidráulico: sabe-se que, quanto maior a diferença de pressão entre as extremidades de um tubo com água, maior a vazão. No caso da eletricidade, quanto maior a tensão entre os terminais de um condutor, maior a corrente que o atravessa.

### Exemplo

Qual a resistência elétrica de um resistor que, quando submetido a uma tensão de 9 V, é percorrido por uma corrente de 2 mA?

*Solução:*

$$R = \frac{U}{I} = \frac{9}{2 \cdot 10^{-3}} = 4,50 \cdot 10^3 \Omega = 4,50 \text{ k}\Omega$$

## 2.3 Potência dissipada em uma resistência

Um dos efeitos da corrente elétrica ao atravessar uma resistência é a transformação de energia elétrica em calor (efeito Joule). No entanto, esse calor produzido nem sempre é desejável, conforme discutido na seção 2.2.

No caso de um motor elétrico, em que a finalidade é transformar energia elétrica em mecânica, o calor gerado pela passagem de corrente nos condutores representa perda de energia, ou seja, a resistência do fio é indesejável e deve ser minimizada, pois a energia nela dissipada não é transformada em energia mecânica. Já nos aquecedores, deseja-se que toda a energia elétrica se transforme em calor.

Em ambos os casos citados, é preciso calcular a potência dissipada no resistor. Para tanto, substitui-se a equação 2.4 na equação 1.6 e se obtém:

$$P = UI = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \quad (2.5)$$

Outra possibilidade é substituir a tensão  $U$  por  $U = RI$  (lei de Ohm), obtendo-se:

$$P = UI = RII = RI^2 \quad (2.6)$$



**Exemplos**

1. Qual a potência dissipada em um resistor de 10 kΩ, percorrido por uma corrente de 5 mA?

*Solução:*

$$P = RI^2 = 10 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 = 250 \text{ mW}$$

2. Determine a potência dissipada em um resistor de 2k2 Ω, submetido a uma ddp de 12 V.

*Solução:*

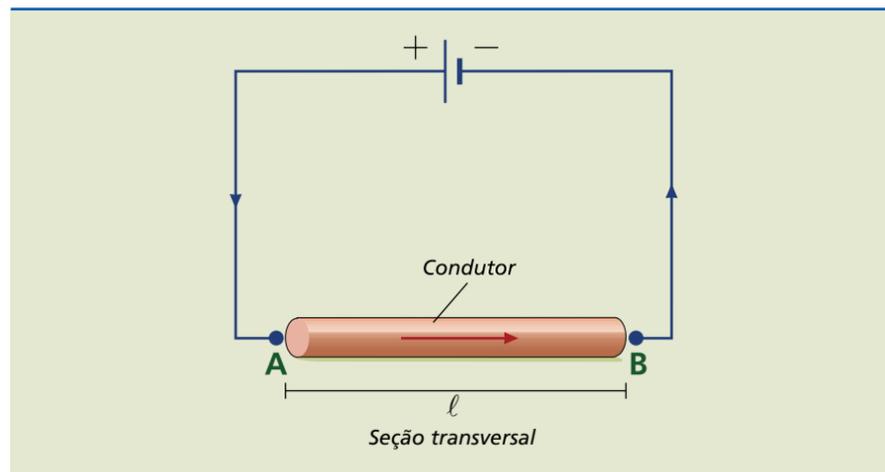
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{12^2}{2,2 \cdot 10^3} = 65,5 \text{ mW}$$

**2.4 Resistência em um condutor**

A resistência elétrica dos condutores depende dos seguintes parâmetros: comprimento do fio (*ℓ*), área de sua seção transversal (*A*), temperatura e material de que é feito (figura 2.14). Ohm estudou a influência deles na resistência com experimentos em que variava um parâmetro de cada vez, mantendo os demais constantes.

**Figura 2.14**

Parâmetros que afetam o valor da resistência ôhmica.



**2.4.1 Influência do material: resistividade**

O cientista alemão analisou vários materiais, medindo a resistência de um condutor de 1 m de comprimento, 1 mm<sup>2</sup> de seção transversal e temperatura ambiente fixa em torno de 20 °C.

O valor da resistência de um condutor nessas condições, medida para diversos materiais (tabela 2.2), é uma constante denominada resistividade elétrica (símbolo: ρ; leia-se “rô”). A resistividade é uma propriedade de cada material.

A unidade da resistividade é  $\Omega\text{m} = 10^6 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$ .

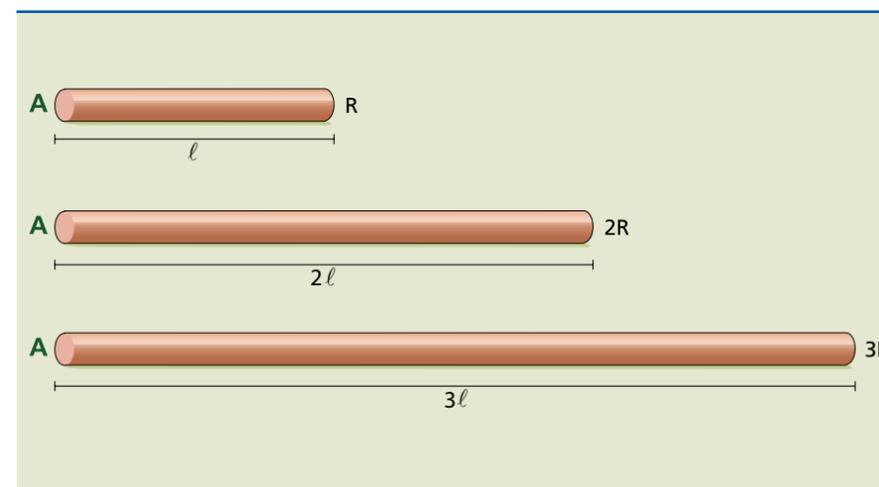
Material	ρ (Ω · m) a 20 °C
Prata	1,6 · 10 <sup>-8</sup>
Cobre	1,7 · 10 <sup>-8</sup>
Ouro	2,3 · 10 <sup>-8</sup>
Alumínio	2,8 · 10 <sup>-8</sup>
Tungstênio	4,9 · 10 <sup>-8</sup>
Platina	10,8 · 10 <sup>-8</sup>
Ferro	11 · 10 <sup>-8</sup>
Nicromo	110 · 10 <sup>-8</sup>

**Tabela 2.2**

Valores aproximados da resistividade para diversos materiais

**2.4.2 Influência do comprimento**

Variando apenas o comprimento (*ℓ*), conforme ilustrado na figura 2.15, Ohm concluiu: “A resistência elétrica é diretamente proporcional ao comprimento do condutor”.



**Figura 2.15**

Relação de R com o comprimento ℓ.

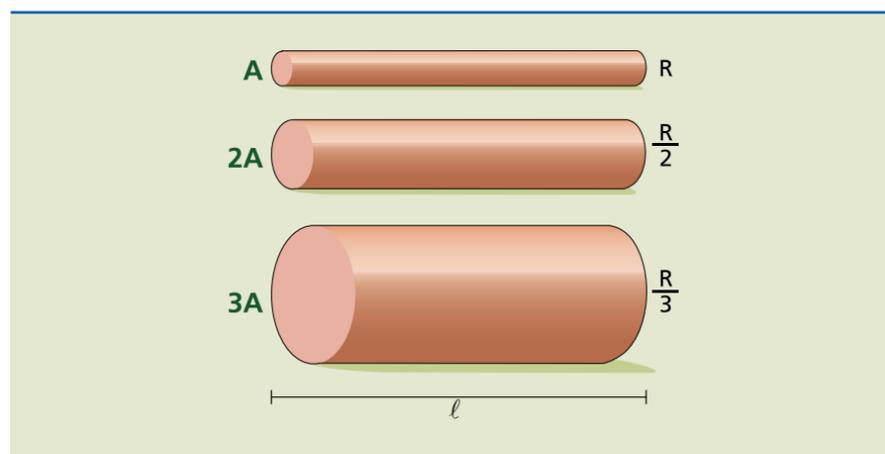
**2.4.3 Influência da área da seção transversal do condutor**

Utilizando fios de diâmetros distintos (figura 2.16), Ohm estabeleceu: “A resistência elétrica é inversamente proporcional à área da seção transversal do condutor”.



**Figura 2.16**

Varição da resistência em função da área **A** da seção transversal do condutor:



Retomando a analogia com um sistema hidráulico: com a água sob a mesma pressão, quanto maior o diâmetro do tubo, menor a oposição à passagem do líquido. No caso elétrico, quanto maior a área do condutor, menor a oposição à passagem da corrente.

### 2.4.4 Cálculo da resistência

De tudo isso se conclui: “A resistência elétrica de um condutor é diretamente proporcional ao comprimento e à resistividade e inversamente proporcional à área da seção transversal”. Portanto:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (2.7)$$

em que:

- **R** é a resistência elétrica (em  $\Omega$ );
- **r** a resistividade elétrica do material (em  $\Omega \cdot \text{m}$ );
- **ℓ** o comprimento do condutor (em **m**);
- **A** a área da seção transversal do condutor (em  $\text{m}^2$ ).

#### Exemplo

Determine a resistência de um fio de cobre, na temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , com  $2,5 \text{ mm}^2$  de seção transversal, para os seguintes valores de comprimento:

- $\ell_a = 20 \text{ cm}$
- $\ell_b = 100 \text{ m}$
- $\ell_c = 5 \text{ km}$

Dado:  $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  (a  $20^\circ\text{C}$ )

*Solução:*

A partir da equação 2.7, obtém-se:

$$\text{a) } R_a = \rho \frac{\ell_a}{A} = \frac{(1,7 \cdot 10^{-8})(0,2)}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 1,36 \cdot 10^{-3} \Omega = 1,36 \text{ m}\Omega$$

$$\text{b) } R_b = \rho \frac{\ell_b}{A} = \frac{(1,7 \cdot 10^{-8})(100)}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 0,68 \Omega = 680 \text{ m}\Omega$$

$$\text{c) } R_c = \rho \frac{\ell_c}{A} = \frac{(1,7 \cdot 10^{-8})(5 \cdot 10^3)}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 34 \Omega = 34 \text{ 000 m}\Omega$$

### 2.4.5 Influência da temperatura sobre a resistência elétrica

Além do tipo de material e de suas dimensões, a resistência elétrica também depende da temperatura, ou seja, da mobilidade das partículas no interior do condutor.

Para a maioria das substâncias, a elevação da temperatura resulta em maior resistência elétrica, pois amplia a mobilidade (agitação térmica) das partículas, gerando colisões entre estas e os elétrons livres em movimento no interior do condutor. Isso ocorre principalmente nos metais.

Em substâncias como o grafite e nos condutores iônicos, ocorre o contrário. O aumento da temperatura implica maior mobilidade das partículas, porém maior número de elétrons livres provém do rompimento (quebra) nas ligações químicas existentes. Tal efeito prevalece sobre o aumento da mobilidade e resulta em menor resistência com o aumento da temperatura.

Nas soluções, temperaturas mais altas provocam redução na viscosidade e, portanto, maior mobilidade dos íons, favorecendo a condução elétrica, ou seja, aumento da temperatura significa diminuição da resistência elétrica, em uma relação que depende do tipo de solução. Os semicondutores, que serão estudados posteriormente, apresentam comportamento semelhante.

Para condutores metálicos sólidos, o comportamento da resistência com a temperatura é ditado pela equação 2.8.

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta) \quad (2.8)$$

em que:

- **R** é a resistência elétrica nova na temperatura final  $\theta_f$  (em  $\Omega$ );
- **R<sub>0</sub>** a resistência elétrica na temperatura inicial  $\theta_0$  (em  $\Omega$ );
- **Δθ** =  $\theta_f - \theta_0$  a variação de temperatura (em  $^\circ\text{C}$ );
- **α** o coeficiente de temperatura do material (em  $^\circ\text{C}^{-1}$ ), que representa a variação da resistência elétrica que um condutor com  $1 \Omega$  sofre, quando a temperatura varia  $1^\circ\text{C}$ .



A tabela 2.3 apresenta valores de  $\alpha$  para metais comumente empregados em equipamentos eletroeletrônicos.

**Tabela 2.3**

Valores de  $\alpha$  para metais

Material	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
Platina	$3,0 \cdot 10^{-3}$
Alumínio	$3,2 \cdot 10^{-3}$
Cobre	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Prata	$4,0 \cdot 10^{-3}$
Tungstênio	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$5,0 \cdot 10^{-3}$
Nicromo	$0,2 \cdot 10^{-3}$

A variação da resistividade com a temperatura recebe equação análoga:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta\theta) \quad (2.9)$$

em que:

- $\rho$  é a resistividade do material na temperatura final ( $\theta_f$ );
- $\rho_0$  a resistividade do material na temperatura inicial ( $\theta_0$ ).

### Exemplos

1. Determine a resistividade de um condutor de alumínio na temperatura de  $60^{\circ}\text{C}$ , sabendo que na temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$  sua resistividade vale  $2,18 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e seu coeficiente de temperatura vale  $3,2 \cdot 10^{-3} (^{\circ}\text{C}^{-1})$ .

*Solução:*

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta\theta)$$

$$\rho = 2,18 \cdot 10^{-8} (1 + (3,2 \cdot 10^{-3}) (60^{\circ} - 20^{\circ})) = 2,46 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}$$

2. Um condutor de cobre na temperatura ambiente de  $20^{\circ}\text{C}$  possui resistência elétrica de  $100 \Omega$ . Qual sua resistência quando a temperatura mudar para:

- $\theta_a = 24^{\circ}\text{C}$
- $\theta_b = 12^{\circ}\text{C}$
- $\theta_c = 120^{\circ}\text{C}$
- $\theta_d = 1000^{\circ}\text{C}$

Dado:  $\alpha_{\text{cu}} = 3,90 \cdot 10^{-3} (^{\circ}\text{C}^{-1})$

*Solução:*

$$\text{a) } R_a = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta_a) = 100 (1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (24 - 20)) = 102 \Omega$$

$$\text{b) } R_b = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta_b) = 100 (1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (12 - 20)) = 96,6 \Omega$$

$$\text{c) } R_c = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta_c) = 100 (1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (120 - 20)) = 139 \Omega$$

$$\text{d) } R_d = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta_d) = 100 (1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (1000 - 20)) = 482 \Omega$$

**Nota:** no exemplo 2, podemos observar que a resistência elétrica de condutores metálicos sofre variação significativa somente quando a oscilação da temperatura for muito grande. Por isso, exceto em aplicações específicas, desprezaremos aqui a influência de variações pequenas, considerando-a constante.

## 2.5 Isolante ideal e supercondutores

Nem o melhor dos isolantes está livre de ser atravessado por corrente elétrica, ou seja, o isolante ideal só existe teoricamente. Por maior que seja a resistência ou resistividade elétrica de uma substância, alguns elétrons sempre podem atravessá-la. Ao se elevar a tensão aplicada no material isolante, aumenta-se o campo elétrico no interior dele, até o ponto em que ocorre uma “avalanche” de cargas elétricas, gerando calor e temperatura suficiente para destruir o material de maneira irreversível.

De outro lado, em temperaturas próximas ao zero absoluto (cerca de  $-273,15^{\circ}\text{C}$ ), a resistência dos metais é praticamente nula, fazendo com que eles se comportem como condutores ideais ou supercondutores. As tentativas de descoberta de materiais nos quais o fenômeno ocorre em temperaturas mais elevadas resultaram em um composto de ítrio, cobre, bário e oxigênio. Na temperatura de aproximadamente  $-38^{\circ}\text{C}$ , ele possui características de um supercondutor, ou seja, apresenta resistência nula.

Existem aplicações comerciais para supercondutores, incluindo os magnetos de aparelhos de ressonância magnética e os magnetos dos novos trens-bala levitados (figura 2.17). Estão sendo estudadas aplicações de supercondutores em transformadores e geradores, em linhas de transmissão de energia elétrica, em armazenadores de energia elétrica, em motores para barcos etc.

**Figura 2.17**

Trem-bala japonês (Shinkansen) levitado (Japan Railway), que utiliza magnetos supercondutores.



### Supercondutividade

A descoberta do fenômeno da supercondutividade é atribuída ao físico holandês Heike Kamerlingh-Onnes. Ele percebeu, durante experimentos realizados no começo do século XX, que a resistência elétrica do mercúrio desaparecia quando o elemento era resfriado à temperatura de 4,2 K. O mesmo fenômeno acontecia com a resistência de outros metais, mas a temperaturas diferentes. Heike não conseguiu, no entanto, avançar muito nas pesquisas: os custos para resfriar determinados materiais eram tão altos que se tornaram impeditivos na época. Mesmo nos supercondutores de alta temperatura (temperatura crítica acima de 77 K), que utilizam nitrogênio líquido como refrigerante, os custos de refrigeração e isolamento térmica são elevados.

## 2.6 Condutância (G) e condutividade elétricas (σ)

Condutância é a facilidade que um condutor oferece ao fluxo das cargas elétricas (corrente elétrica). É definida pelo inverso da resistência elétrica (equação 2.10).

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.10)$$

Sua unidade é o mho (igual a 1/Ω; símbolo:  $\mathcal{U}$ ) ou o siemens (S).

De modo análogo, a condutividade é o inverso da resistividade elétrica (equação 2.11) ou, ainda, a condutância elétrica determinada em condições particulares de um condutor, com 1 m de comprimento, 1 mm<sup>2</sup> de seção transversal, na temperatura de 20 °C.

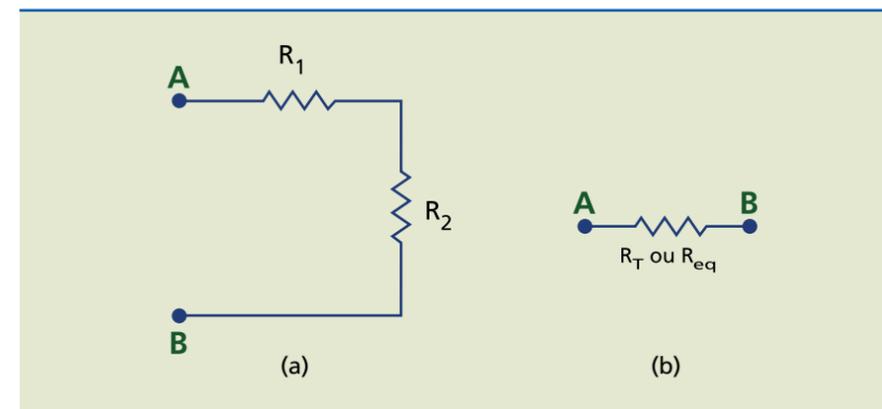
$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.11)$$

Sua unidade é o siemens por metro ( $\frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega m}$ ).

## 2.7 Associação de resistores

Na análise de circuitos elétricos, muitas vezes é conveniente representar um trecho complexo, com muitos resistores, por um único resistor cuja resistência equivale à do conjunto. A resistência final dessa associação é comumente denominada resistência total ( $R_T$ ) ou resistência equivalente ( $R_{eq}$ ), **vista de** dois pontos do circuito.

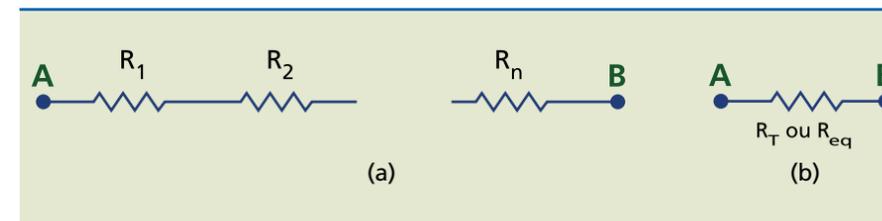
A figura 2.18a mostra um circuito com duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  entre os **nós** A e B, e a figura 2.18b, uma única resistência  $R_T$  (ou  $R_{eq}$ ), equivalente a  $R_1$  e  $R_2$ . Se for aplicado um ohmímetro nos terminais A e B desses circuitos, ambos apresentarão a mesma resistência. Se for aplicada uma tensão  $U$  entre os pontos A e B, ambos apresentarão a mesma corrente  $I$ .



**Figura 2.18**  
(a) Circuito com dois resistores e  
(b) resistor equivalente.

### 2.7.1 Associação em série

Na associação em série, a mesma corrente passa por todos os resistores de  $R_1$  a  $R_n$ . A figura 2.19 ilustra esse tipo de associação e o resistor equivalente.



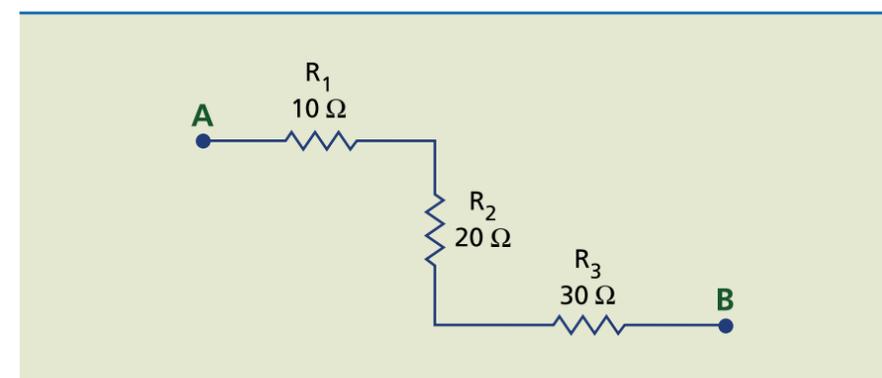
**Figura 2.19**  
(a) Associação em série e  
(b) resistor equivalente.

Na associação em série, a resistência equivalente é a soma das várias resistências da ligação.

$$R_{eq} = R_T = R_{AB} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.12)$$

#### Exemplo

Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B da figura 2.20.



**Figura 2.20**  
Circuito com três resistores em série.

A expressão “vista de” será aqui empregada para facilitar a visualização do circuito que se quer destacar. Funciona como se olhássemos para o circuito a partir dos pontos considerados.

Nó elétrico é um ponto de ligação no circuito elétrico onde existem três ou mais ramos, ou seja, onde saem/chegam três ou mais correntes.



*Solução:*

Pela equação 2.12, obtém-se:

$$R_{eq} = R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 20 + 30 = 60,0 \Omega$$

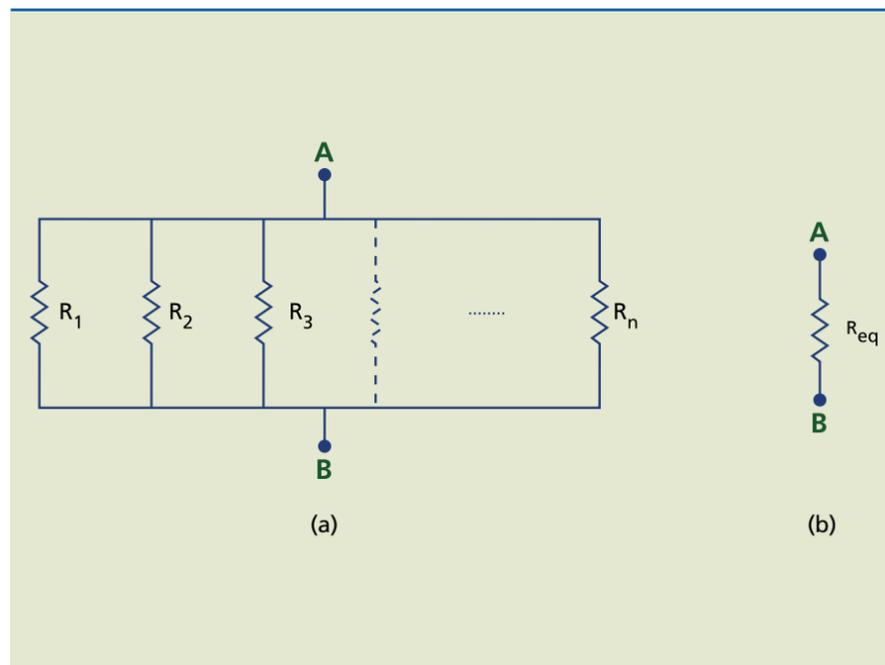
**Nota:** nos próximos exemplos de associação de resistores, serão usados os mesmos valores para  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , a fim de comparar as várias possibilidades de ligações entre elas.

### 2.7.2 Associação em paralelo

Na associação em paralelo, todos os resistores estão submetidos à mesma tensão, como mostra a figura 2.21, que também apresenta o resistor equivalente.

**Figura 2.21**

(a) Associação em paralelo e (b) resistor equivalente.

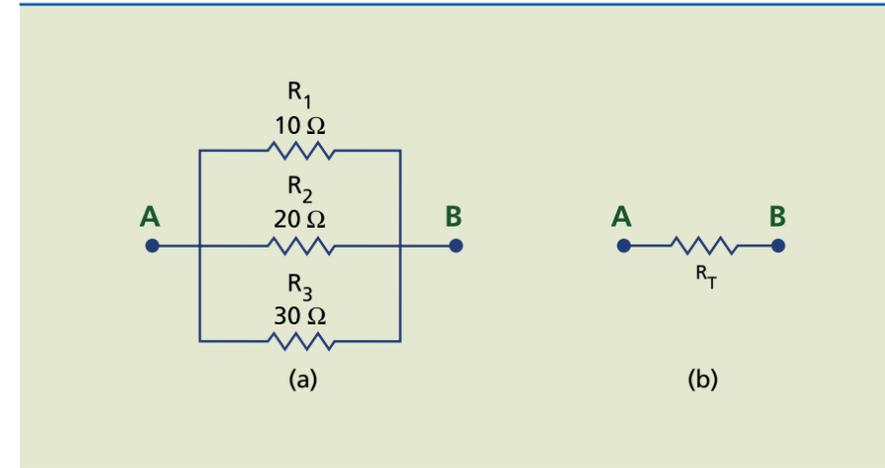


Na associação em paralelo, o inverso da resistência equivalente é igual à soma dos inversos das várias resistências da ligação.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (2.13)$$

#### Exemplo

Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito da figura 2.22a.



**Figura 2.22**

(a) Associação em paralelo de dois resistores e (b) resistor equivalente.

*Solução:*

Pela equação 2.13, obtém-se:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{6+3+2}{60} = \frac{11}{60}$$

Assim:

$$R_{eq} = R_{AB} = \frac{60}{11} = 5,45 \Omega$$

#### Comparação entre associações

Relacionemos o resultado dos exemplos da seção 2.7. Na associação em série, tudo acontece como se aumentássemos o comprimento da resistência. Portanto, a resistência total **umenta**. A ligação em paralelo funciona como se aumentássemos a área do condutor. Logo, a resistência dependerá do inverso da área e seu valor **diminui**.

Na associação em série,  $R_T$  é **sempre maior do que a maior resistência**:

$$R_T = 60 \Omega > R_3 = 30 \Omega$$

Na associação em paralelo,  $R_T$  é **sempre menor do que a menor resistência**:

$$R_T = 5,45 \Omega < R_1 = 10 \Omega$$

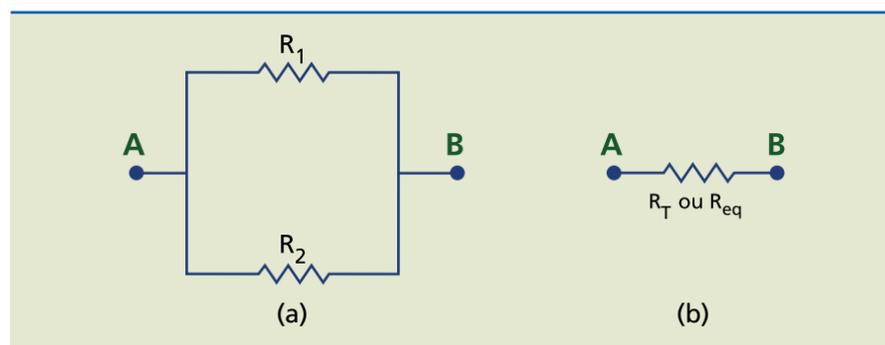
#### Casos particulares de associação em paralelo

- Duas resistências diferentes em paralelo (figura 2.23).



**Figura 2.23**

(a) Associação em paralelo de dois resistores e (b) resistor equivalente.



Pela equação 2.13, obtém-se:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.14)$$

O exemplo a seguir mostra que essa fórmula para dois resistores pode ser empregada para associações com mais de dois resistores. Nesse caso, associam-se inicialmente dois resistores quaisquer. O resistor equivalente é associado com o terceiro resistor, e assim por diante até o último resistor.

**Exemplo**

Calcule a resistência equivalente do circuito da figura 2.22a utilizando a estratégia proposta.

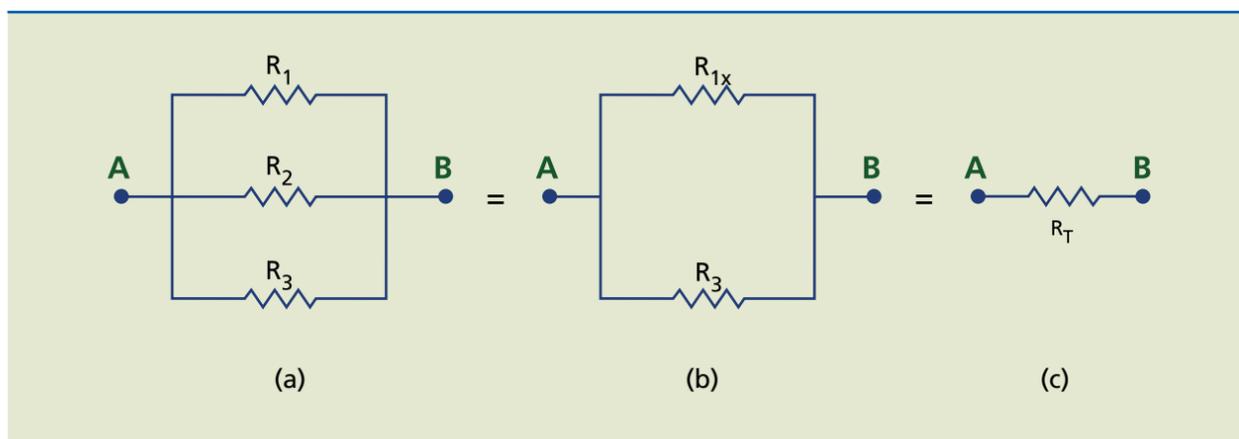
*Solução:*

A figura 2.24a mostra o circuito original. Definindo  $R_x$  como a associação em paralelo de  $R_2$  e  $R_3$ , obtém-se o subcircuito da figura 2.24b, em que:

$$R_x = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \Omega$$

**Figura 2.24**

(a) Associação de três resistores em paralelo, (b) circuito reduzido e (c) resistência total.



Associam-se  $R_x$  e  $R_1$ , obtendo-se:

$$R_T = \frac{12 \cdot 10}{12 + 10} = \frac{120}{22} = 5,45 \Omega,$$

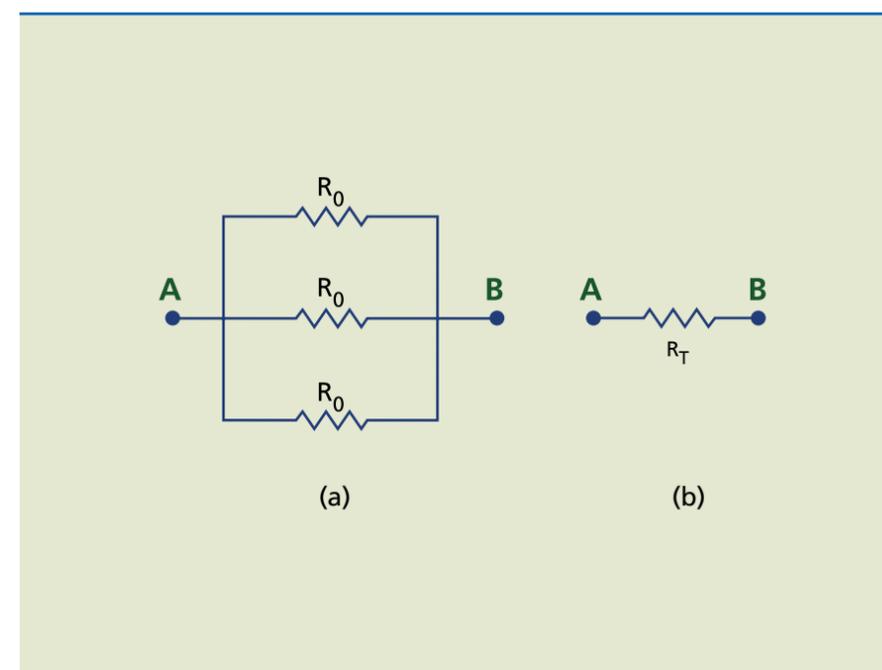
que é idêntico ao calculado utilizando a equação 2.13. Essa é uma estratégia de solução bastante utilizada.

- Associação em paralelo de  $n$  resistores de mesmo valor.

Na figura 2.25a, todos os resistores têm o mesmo valor  $R_0$ .

**Figura 2.25**

(a) Associação em paralelo de  $n$  resistores iguais e (b) resistor equivalente.



A resistência equivalente pode ser obtida pela equação 2.13, obtendo-se:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} + \dots + \frac{1}{R_0} = \frac{1+1+1+ \dots +1}{R_0} = \frac{n}{R_0} \Rightarrow R_T = \frac{R_0}{n} \quad (2.15)$$

O resistor equivalente da associação de  $n$  resistores de valor  $R_0$  é  $R_T = \frac{R_0}{n}$ .

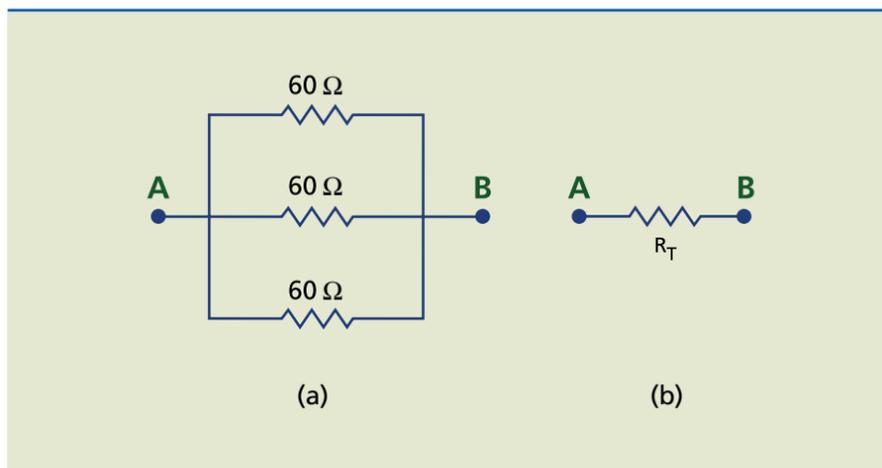
**Exemplo**

Calcule a resistência equivalente do circuito da figura 2.26a.



**Figura 2.26**

(a) Associação em paralelo de três resistores iguais e (b) resistor equivalente.



*Solução:*

Pela equação 2.15, obtém-se:

$$R_T = \frac{60}{3} = 20 \Omega$$

### 2.7.3 Associação mista

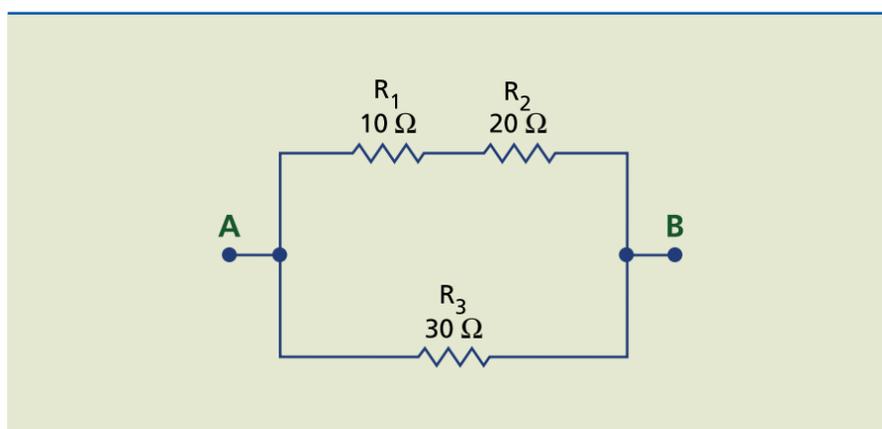
Como o próprio nome diz, é a combinação de duas associações. Não há uma fórmula específica para resolvê-la, mas diversas estratégias empregando as equações anteriores. Os exemplos a seguir mostram possíveis soluções.

#### Exemplos

1. Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B da figura 2.27.

**Figura 2.27**

Associação mista de resistores.

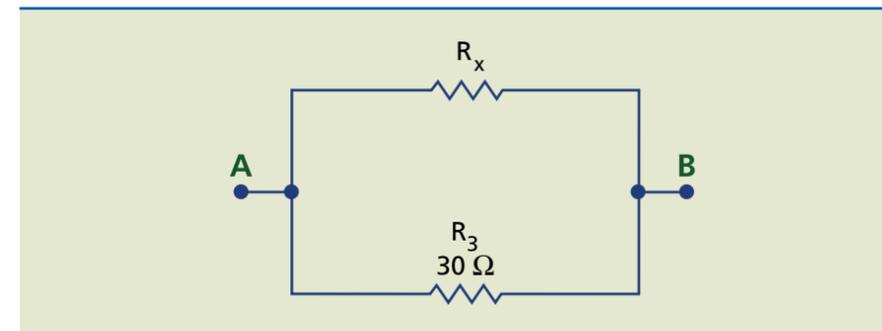


*Solução:*

Os resistores  $R_1$  e  $R_2$  estão em série, resultando em  $R_x = 10 + 20 = 30 \Omega$ , ilustrado no subcircuito da figura 2.28.

**Figura 2.28**

Subcircuito parcial:  $R_x$  é a resistência equivalente de  $R_1$  e  $R_2$ .



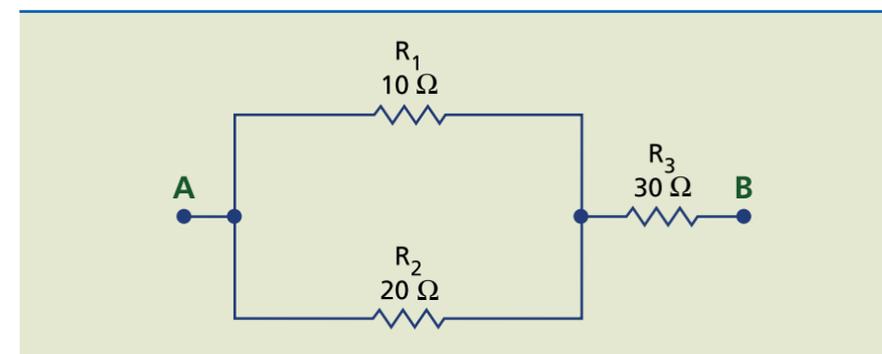
No subcircuito da figura 2.28, nota-se que  $R_x$  e  $R_3$  formam uma associação em paralelo de dois resistores, em que  $R_x = 10 + 20 = 30 \Omega$ . Daí resulta a resistência equivalente:

$$R_T = \frac{30}{2} = 15 \Omega$$

2. Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B da figura 2.29.

**Figura 2.29**

Associação mista de resistores.



*Solução:*

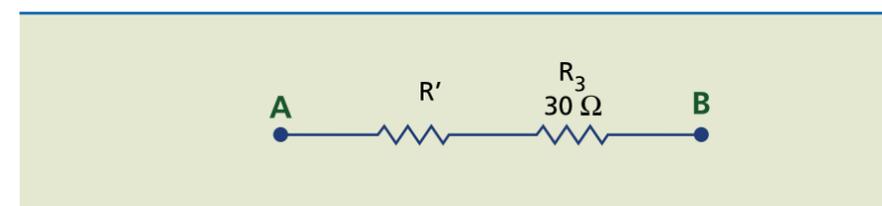
$R_1$  e  $R_2$  estão associados em paralelo, resultando em:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 6,67 \Omega$$

A figura 2.30 mostra a versão simplificada do circuito da figura 2.29, na qual se obtém a resistência equivalente  $R_T = 6,67 + 30 = 36,6 \Omega$ .

**Figura 2.30**

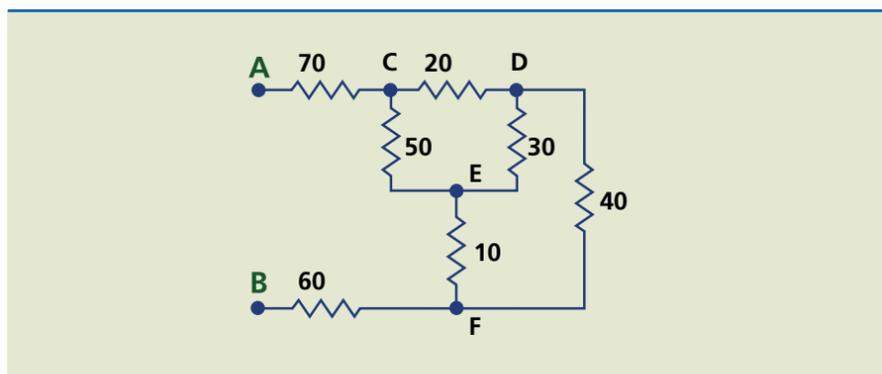
Subcircuito parcial:  $R_x$  é a resistência equivalente de  $R_1$  e  $R_2$ .



## 2.8 Transformações delta-estrela ( $\Delta Y$ ) ou estrela-delta ( $Y\Delta$ )

As técnicas estudadas até agora permitem resolver a grande maioria dos casos de associação de resistores. Existem algumas situações, porém, em que a determinação da resistência equivalente não é possível com os recursos conhecidos. É o caso do circuito misto da figura 2.31. Sugere-se que o leitor tente calcular a resistência equivalente entre os pontos A e B, a fim de compreender a dificuldade da situação.

**Figura 2.31**  
Circuito misto.



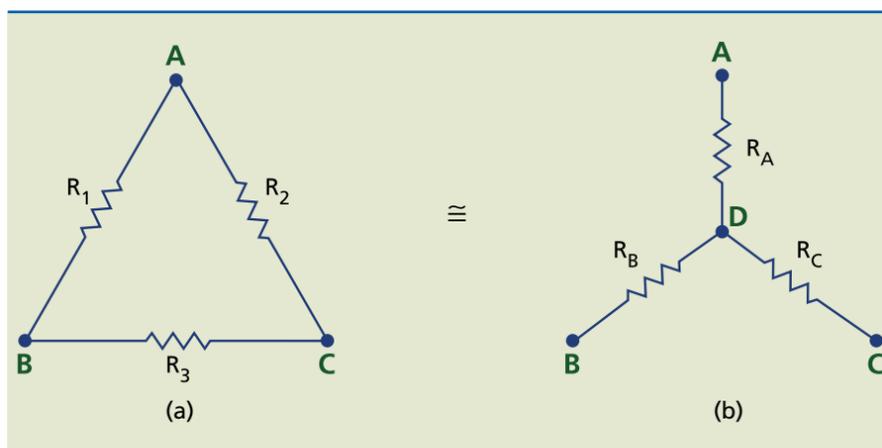
Nesse circuito, não é possível encontrar nenhum par de resistores associados em série nem em paralelo. Tais casos podem ser resolvidos utilizando as transformações delta-estrela ( $\Delta Y$ ) ou estrela-delta ( $Y\Delta$ ).

### Transformação delta-estrela ( $\Delta Y$ )

São conhecidas as resistências do triângulo (delta) formado pelos resistores  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , com vértices nos nós A, B e C, indicados na figura 2.32a. Na ligação equivalente em estrela, surge um quarto ponto (D, central). Cada resistência na estrela é a ligação desse ponto com o vértice respectivo no triângulo. Serão determinadas as resistências da estrela equivalente, formada pelos resistores  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ , mostrados na figura 2.32b, por meio das equações 2.16, 2.17 e 2.18.

**Figura 2.32**

- (a) Circuito original em  $\Delta$  (delta) e
- (b) circuito equivalente em Y (estrela).



$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.16)$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.17)$$

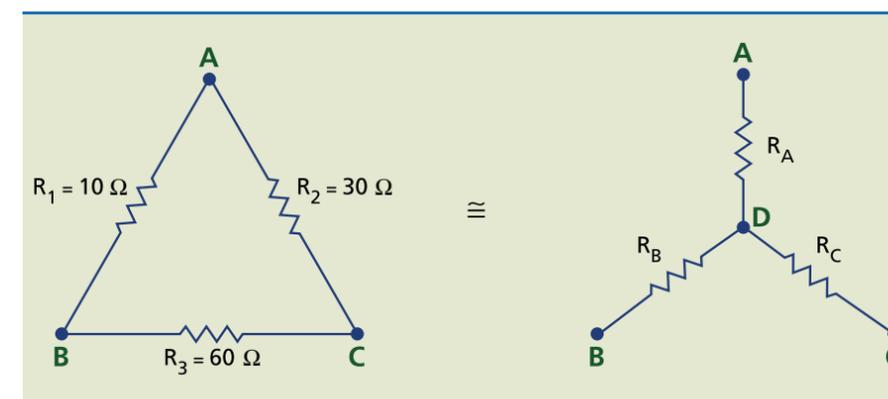
$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.18)$$

### Exemplo

Determine o circuito em estrela equivalente ao circuito em triângulo da figura 2.33.

*Solução:*

Aplicando as equações 2.16, 2.17 e 2.18, obtém-se:



**Figura 2.33**  
Transformação  $\Delta Y$ .

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 30}{10 + 30 + 60} = 3,00 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 6,00 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 18,0 \Omega$$

Observa-se que os valores das resistências na ligação em estrela são menores que na ligação em triângulo inicial.

### Transformação estrela-delta ( $Y\Delta$ )

São conhecidas as resistências da estrela formada pelos resistores  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ , com vértices nos nós A, B e C, indicados na figura 2.34a. Serão determinadas



as resistências do triângulo equivalente, formado pelos resistores  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , mostrados na figura 2.34b, por meio das equações 2.19, 2.20 e 2.21.

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \quad (2.19)$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} \quad (2.20)$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} \quad (2.21)$$

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 18}{18} = 10,0 \, \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 18}{6} = 30,0 \, \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 18}{3} = 60,0 \, \Omega$$

Nesse exemplo, são usados os valores encontrados na transformação anterior e observadas as mesmas posições. Obtêm-se, assim, os mesmos valores de resistências do circuito original.

Observa-se que os valores na ligação em triângulo são maiores que os da ligação em estrela inicial.

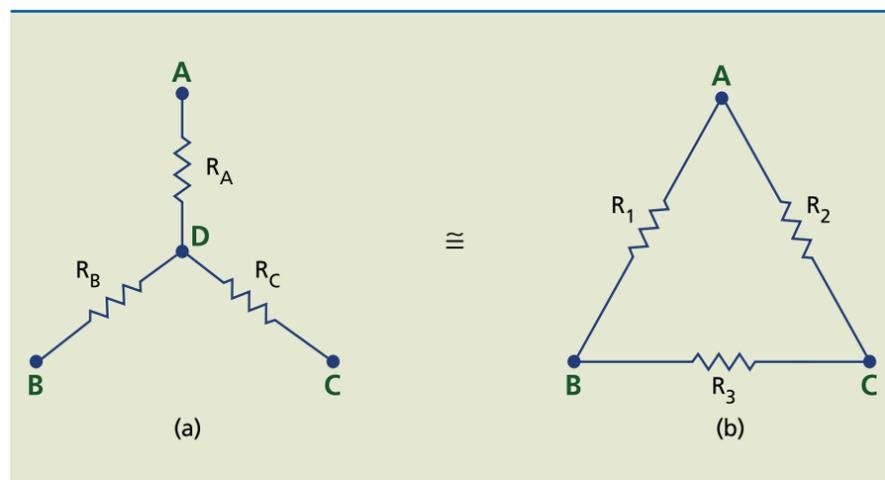
### 2.8.1 Utilização das transformações $\Delta Y$ e $Y\Delta$ na simplificação de circuitos

As transformações  $\Delta Y$  e  $Y\Delta$  serão aplicadas na obtenção da resistência equivalente entre os pontos A e B de dois circuitos.

#### Exemplos

1. Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito da figura 2.36 (idêntico ao da figura 2.31).

**Figura 2.34**  
(a) Circuito original em Y (estrela) e  
(b) circuito equivalente em  $\Delta$  (delta).



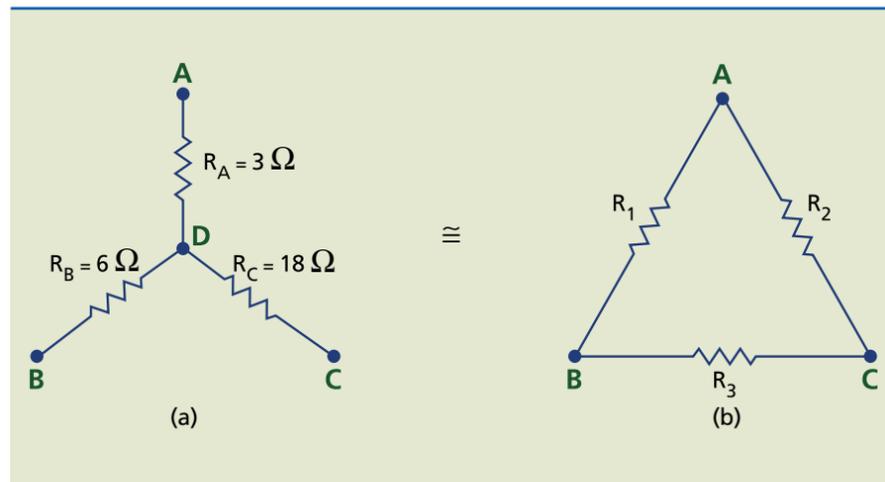
#### Exemplo

Determine o circuito em triângulo equivalente ao circuito em estrela da figura 2.35.

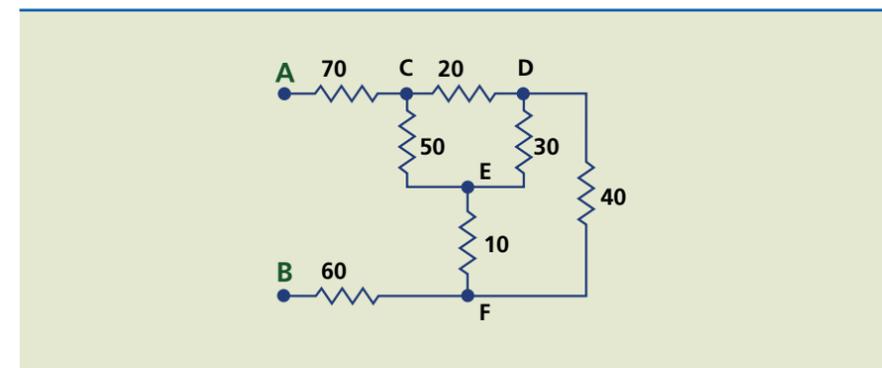
*Solução:*

Aplicando as equações 2.19, 2.20 e 2.21, obtém-se:

**Figura 2.35**  
Transformação  $Y\Delta$ .



**Figura 2.36**  
Circuito misto.



*Solução:*

No circuito, é possível identificar:

- o triângulo CDE;
- o triângulo DEF;
- a estrela com vértices ADE e centro C;
- a estrela com vértices CDF e centro E;
- a estrela com vértices CEF e centro D;
- a estrela com vértices BDE e centro F.



Existem diversas possibilidades de transformação. Não há escolha errada. Algumas opções, porém, exigem menor número de transformações para chegar ao resultado final, o que diminui a chance de erros.

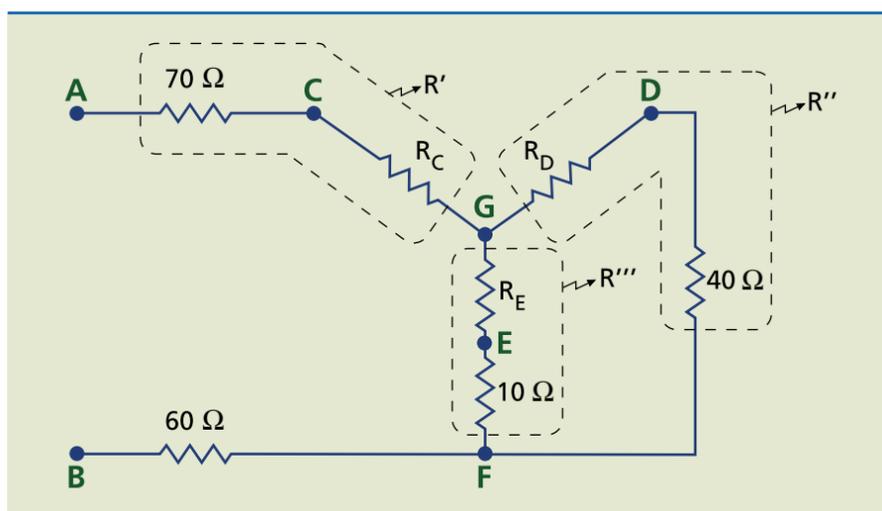
Nesse primeiro contato, certamente o leitor ficará preocupado em descobrir qual será a estratégia ideal para resolver o problema. A melhor sugestão é não se preocupar, definir uma estratégia e seguir em frente. Se a escolha levar a um circuito mais complicado, pode-se voltar e escolher novamente. A prática constante na resolução de circuitos permite adquirir, em pouco tempo, a habilidade de definir o melhor caminho.

São apresentadas a seguir duas estratégias para calcular a resistência equivalente do circuito da figura 2.36.

• **Estratégia 1**

a) Transforma-se o triângulo CDE da figura 2.36 em uma estrela formada pelos resistores  $R_C$ ,  $R_D$ ,  $R_E$ , resultando no circuito da figura 2.37.

**Figura 2.37**  
Transformação do triângulo CDE na estrela formada por  $R_C$ ,  $R_D$ ,  $R_E$ .

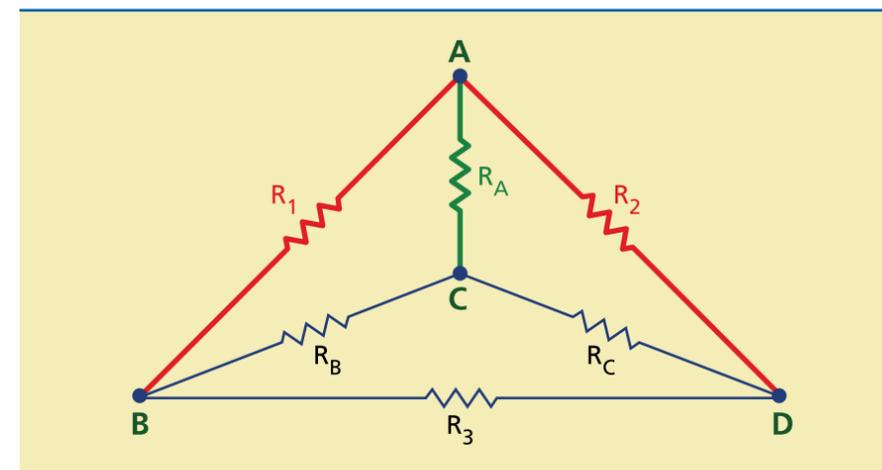


b) Calculam-se  $R_C$ ,  $R_D$ ,  $R_E$  empregando as equações 2.16, 2.17 e 2.18.

**Memorizando a transformação  $\Delta Y$**

A resistência do resistor da estrela conectado ao vértice C é igual ao produto das resistências dos resistores do triângulo que estão conectados ao nó C dividido pela soma das resistências que compõem o triângulo (figura 2.38).

$$R_C = \frac{\text{produto das resistências do } \Delta \text{ ligadas ao nó C}}{\text{soma das resistências do } \Delta} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.22)$$



**Figura 2.38**  
Esquema para memorização da transformação  $\Delta Y$ .

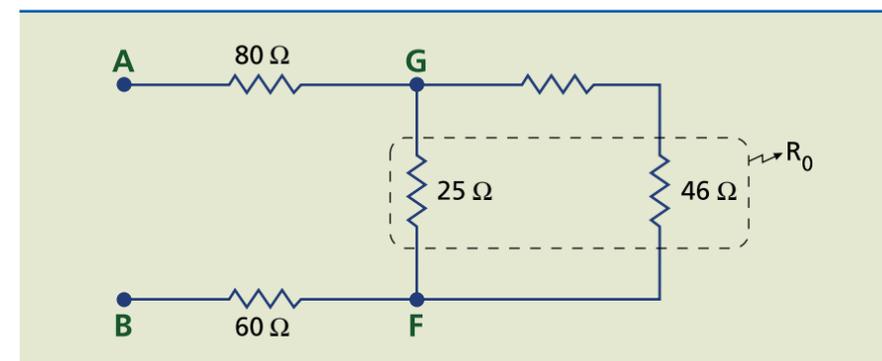
Assim:

$$R_C = \frac{20 \cdot 50}{20 + 30 + 50} = 10,0 \Omega$$

$$R_D = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30 + 50} = 6,00 \Omega$$

$$R_E = \frac{30 \cdot 50}{20 + 30 + 50} = 15,0 \Omega$$

c) Nessa transformação, surgem ligações em série identificadas na figura 2.37, que resultam nos resistores  $R' = 10 + 70 = 80 \Omega$ ,  $R'' = 6 + 40 = 46 \Omega$  e  $R''' = 10 + 15 = 25 \Omega$ . Redesenhando o esquema da figura 2.37, obtém-se o da figura 2.39.



**Figura 2.39**  
Simplificação do circuito da figura 2.37.

d) Na figura 2.39, identifica-se a associação em paralelo dos resistores de  $25 \Omega$  e  $46 \Omega$ , resultando no resistor  $R_0$ , cuja resistência vale:

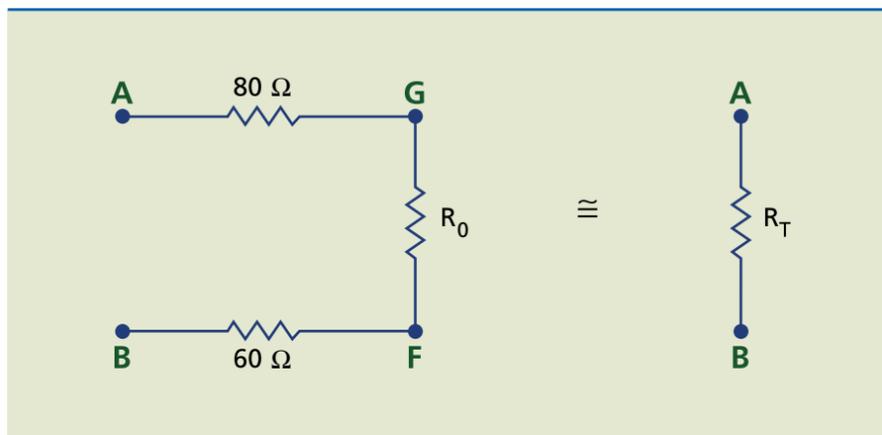
$$R_0 = \frac{25 \cdot 46}{25 + 46} = 16,2 \Omega$$



e) Redesenhando a figura 2.39, obtêm-se a figura 2.40, que apresenta três resistores em série, resultando na resistência equivalente:

$$R_T = 80 + 16,2 + 60 = 156,2 \Omega$$

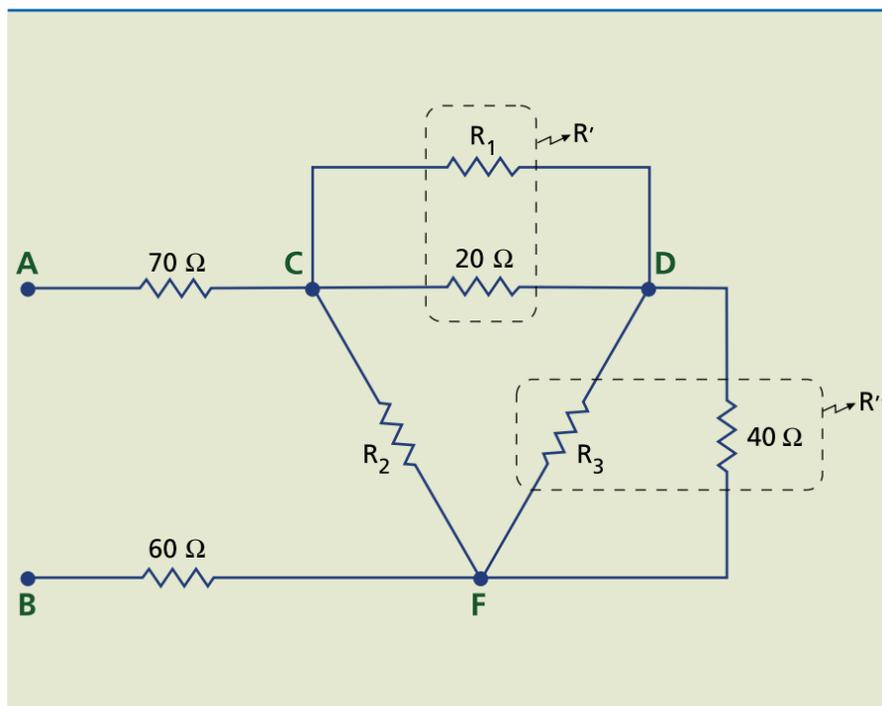
**Figura 2.40**  
Circuito simplificado da figura 2.39.



• **Estratégia 2**

a) Transforma-se a estrela CDF (com centro E) da figura 2.36 em um triângulo com vértices em CDF (figura 2.41).

**Figura 2.41**  
Transformação da estrela CDF (com centro E) no triângulo CDF.



b) As resistências  $R_C$ ,  $R_D$ ,  $R_E$  do triângulo são calculadas empregando as equações 2.19, 2.20 e 2.21. Apresenta-se no quadro a seguir uma estratégia para a memorização da transformação  $Y\Delta$ .

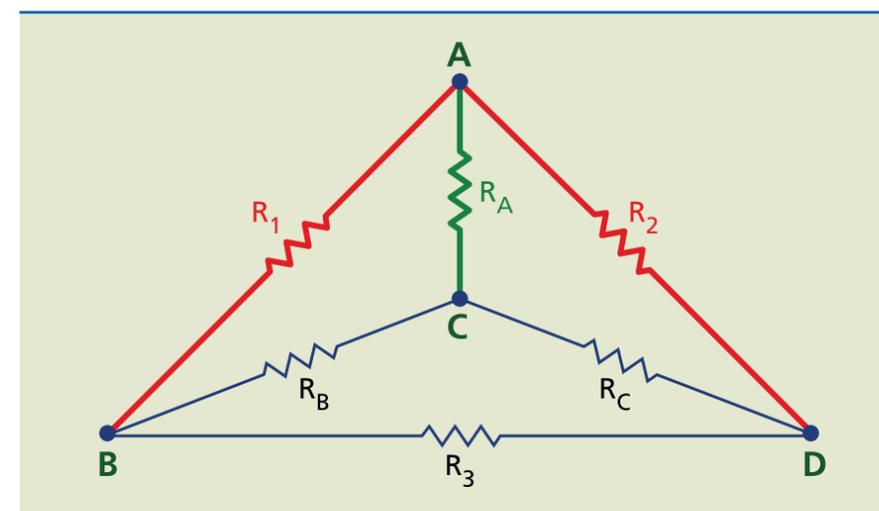
**Memorizando a transformação  $Y\Delta$**

A resistência do resistor  $R_1$  do triângulo, conectado aos nós C e D, é igual à soma dos produtos dois a dois das resistências que compõem a estrela dividido pelo resistor da estrela que não se conecta ao resistor  $R_1$  (figura 2.42).

$$R_1 = \frac{\text{soma dos produtos dois a dois das resistências que compõem a estrela}}{\text{resistor da estrela que não se conecta ao resistor } R_1} = \frac{R_C R_D + R_D R_E + R_C R_E}{R_C} \quad (2.23)$$

**Figura 2.42**

Esquema para memorização da transformação  $Y\Delta$ .



Obtêm-se, assim:

$$R_1 = \frac{50 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 30}{10} = 230 \Omega$$

$$R_2 = \frac{50 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 30}{30} = 76,7 \Omega$$

$$R_3 = \frac{50 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 30}{50} = 46,0 \Omega$$

c) Voltando à figura 2.41, observa-se que surgiram duas associações em paralelo:

- Entre os nós C e D há a associação entre os resistores de  $20 \Omega$  e  $R_1$ , resultando no resistor:

$$R' = \frac{230 \cdot 20}{230 + 20} = 18,4 \Omega$$

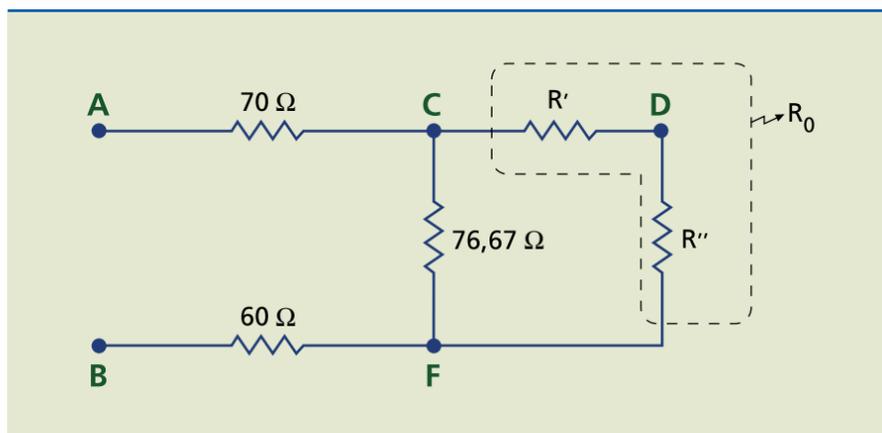


- Entre os nós D e F há a associação entre os resistores de  $40 \Omega$  e  $R_3$ , resultando no resistor:

$$R'' = \frac{40 \cdot 46}{40 + 46} = 21,4 \Omega$$

d) Redesenha-se a figura 2.41, obtendo-se o circuito da figura 2.43.

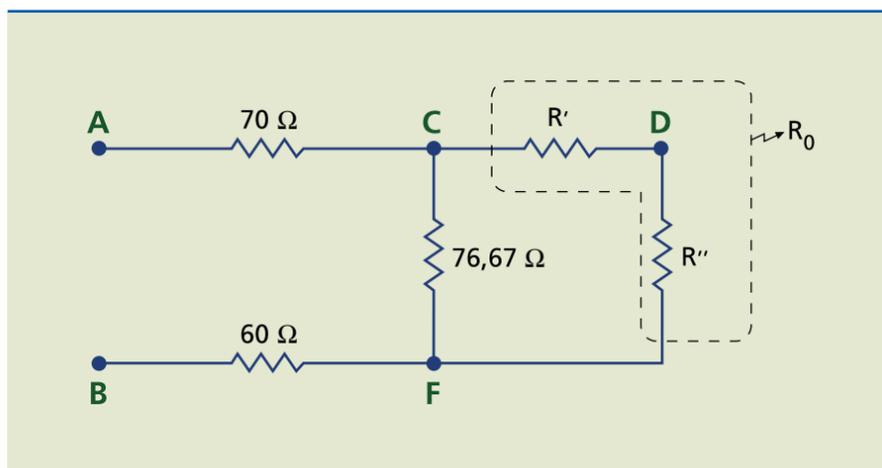
**Figura 2.43**  
Simplificação do circuito da figura 2.41.



- e) Calcula-se a resistência em série, obtendo-se  $R_0 = R' + R'' = 18,4 + 21,4 = 39,4 \Omega$ .
- f) Calcula-se a associação em paralelo do resistor de  $76,7 \Omega$  com  $R_0$ , obtendo-se o resistor:

$$R_x = \frac{76,67 \cdot 39,8}{76,67 + 39,8} = 26,2 \Omega, \text{ ilustrado na figura 2.44.}$$

**Figura 2.44**  
Simplificação do circuito da figura 2.43.

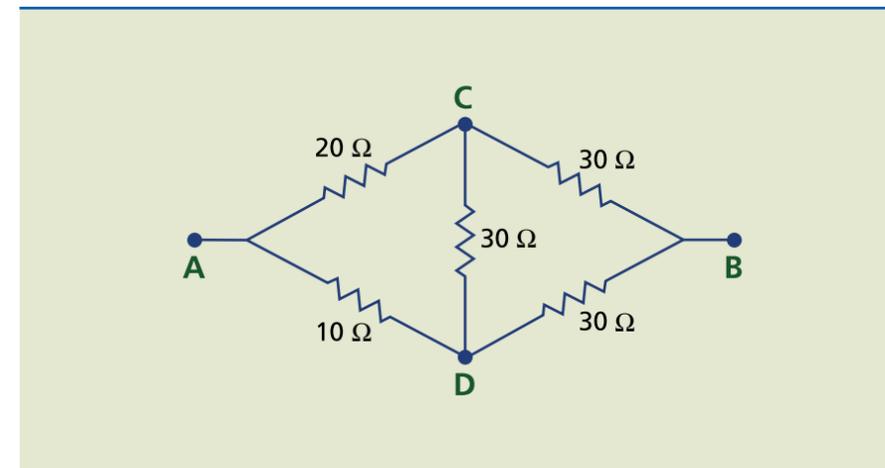


g) Calcula-se a associação em série da figura 2.43, obtendo-se:

$$R_T = 70 + 26,2 + 60 = 156,2 \Omega.$$

Observa-se que as duas estratégias de solução levaram ao mesmo resultado. Sugere-se que o leitor tente outro caminho como exercício.

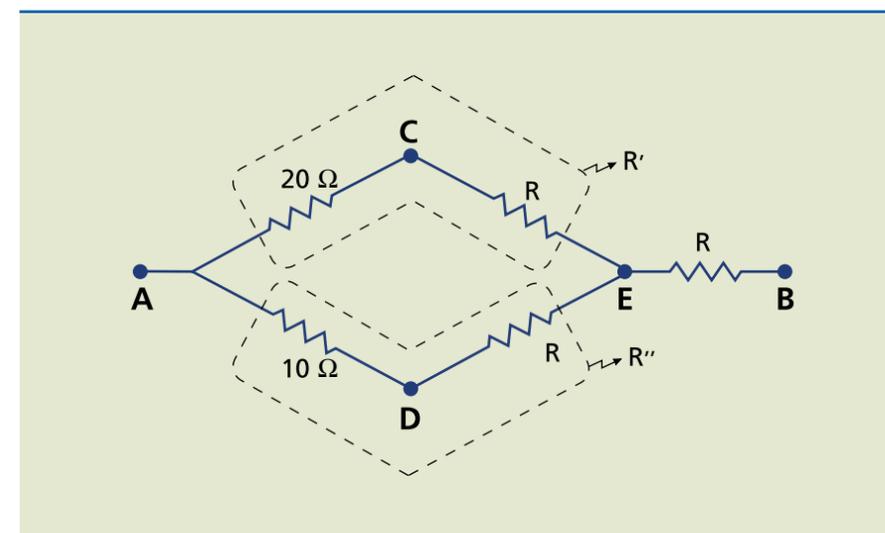
2. Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito da figura 2.45.



**Figura 2.45**  
Circuito misto.

*Solução:*

a) Uma possível solução é transformar o triângulo CDB em estrela, o que é indicado na figura 2.46.



**Figura 2.46**  
Simplificação do circuito da figura 2.45.

b) Para o triângulo CDE, as três resistências são iguais; logo, as resistências da estrela equivalente também serão, e terão valor  $R$  calculado por:

$$R = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30 + 30} = \frac{30}{3} = 10,0 \Omega$$



Para um triângulo com três resistores iguais, de valor  $R_{\Delta}$ , cada resistor da estrela equivalente vale:

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} \quad (2.24)$$

Para uma estrela com três resistores iguais, de valor  $R_Y$ , cada resistor do triângulo equivalente vale:

$$R_{\Delta} = 3R_Y \quad (2.25)$$

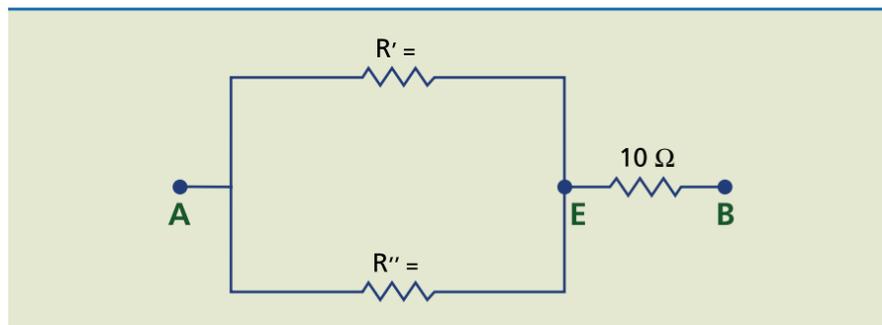
c) Na figura 2.46, verificam-se duas associações em série:

- o resistor  $R'$ , formado pelo resistor de  $20 \Omega$  e  $R$ , em que:  
 $R' = 20 + 10 = 30,0 \Omega$
- o resistor  $R''$ , formado pelo resistor de  $10 \Omega$  e  $R$ , em que:  
 $R'' = 10 + 10 = 20,0 \Omega$

d) Redesenha-se o circuito da figura 2.46, obtendo-se o esquema na figura 2.47.

**Figura 2.47**

Simplificação do circuito da figura 2.46.



e) A associação em paralelo de  $R'$  e  $R''$  resulta em:

$$R_0 = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12,0 \Omega$$

f) Finalmente, há os resistores de  $10 \Omega$  e  $R_0$  em série, resultando em:

$$R_T = 10 + 12 = 22,0 \Omega$$

# Capítulo 3

## Geradores e receptores



### 3.1 Geradores

Geradores são dispositivos que transformam um tipo qualquer de energia em energia elétrica. Conforme a fonte de energia, eles podem ser classificados em:

- **Eletroquímicos** (figura 3.1) – Produzem a diferença de potencial por meio de reações químicas em seu interior, como as pilhas e as baterias.

**Figura 3.1**

Geradores eletroquímicos:  
(a) pilhas e (b) bateria automotiva.



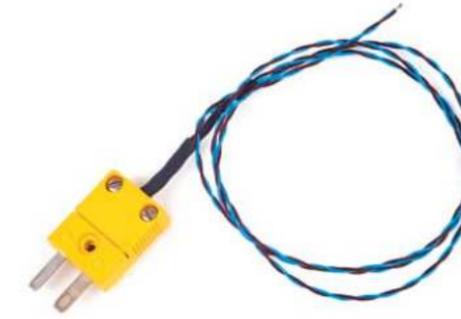
- **Eletromagnéticos** (figura 3.2) – A variação do fluxo magnético nas bobinas do gerador induz uma tensão em seus terminais. Essa variação é obtida pela rotação de um ímã ou eletroímã acoplado ao eixo do gerador. A energia mecânica que gira o eixo provém de turbinas (hidráulicas, eólicas, a vapor etc.), motores de combustão etc.

**Figura 3.2**

Gerador eletromagnético.



- **Par termoeletrico** (figura 3.3) – A tensão é promovida por efeito termoeletrico: o aquecimento de uma junção de dois metais (constantan e ferro, por exemplo), conhecida como par termoeletrico, dá origem a uma tensão em seus terminais, que depende da temperatura da junção.



© DAVID J. GREEN / ALAMY/OTHER IMAGES

**Figura 3.3**

Par termoeletrico.

- **Piezoelétricos** – Certos cristais, como a turmalina e o quartzo, produzem tensão elétrica quando submetidos a esforços de compressão ou de tração, fenômeno chamado piezoelétrico. Esses materiais são usados em agulhas de toca-discos de vinil, microfones etc.
- **Fotoelétricos** (figura 3.4) – Células construídas de silício absorvem a radiação solar e emitem elétrons; assim, produzem tensão em seus terminais quando iluminadas. Essa emissão estimulada pela luz é denominada efeito fotoelétrico.

**Figura 3.4**

Painel com células solares, que liberam cargas elétricas sob incidência de luz.



MATTI/SHUTTERSTOCK

#### 3.1.1 Geradores de tensão e de corrente

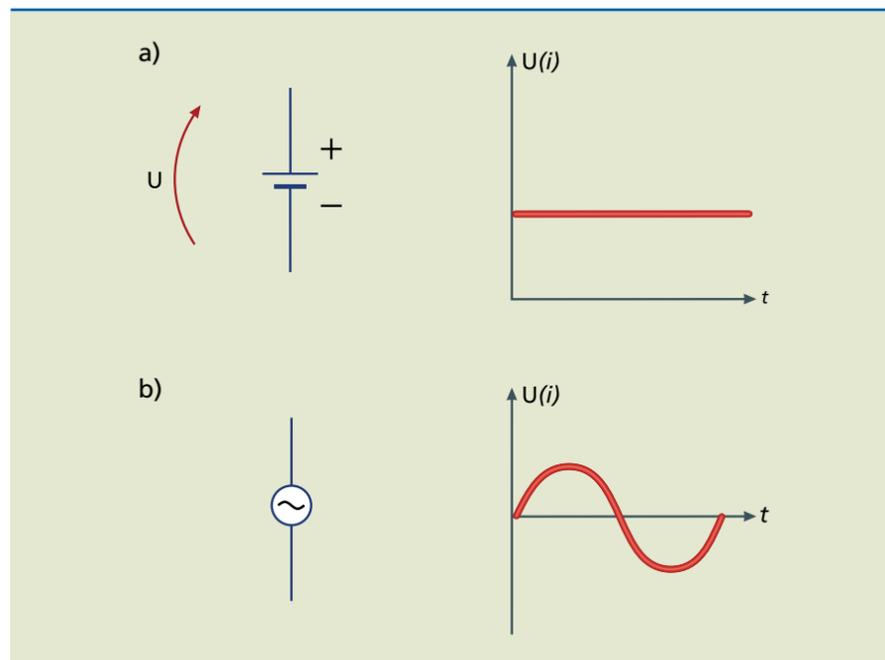
O gerador de tensão introduzido na seção 1.7 e mencionado ao longo dos capítulos anteriores é conhecido como gerador ideal. Ele mantém a tensão constante, independentemente da corrente que o percorre.



Dois geradores de tensão de interesse prático são o de tensão contínua e o de tensão alternada (senoidal). Seus símbolos e gráficos da tensão em função do tempo encontram-se na figura 3.5.

**Figura 3.5**

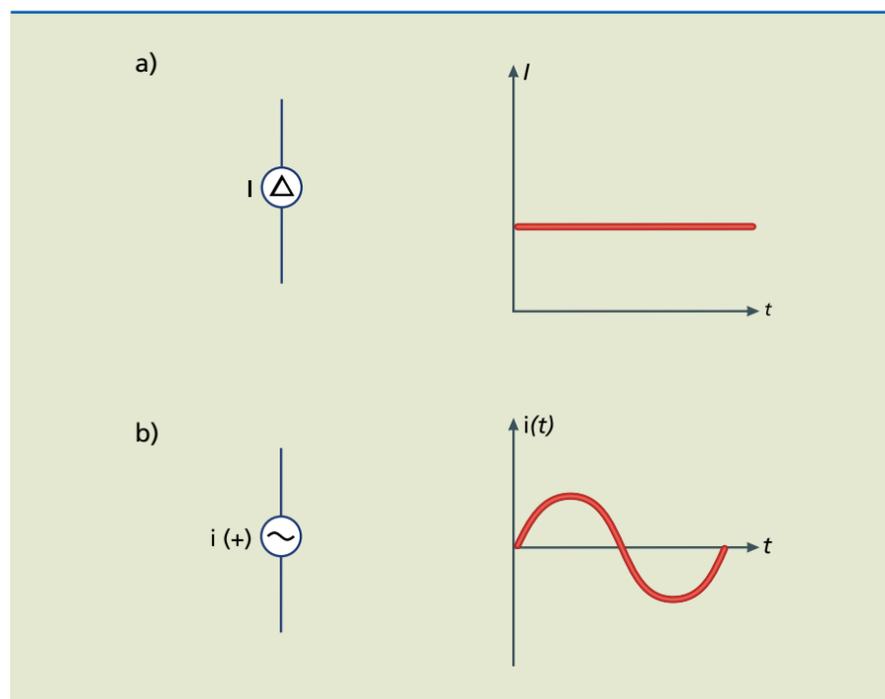
(a) Gerador de tensão contínua ideal e (b) gerador de tensão alternada senoidal, com os respectivos gráficos da variação da tensão em função do tempo.



A figura 3.6 mostra outros símbolos também usados para representar geradores ideais de corrente contínua e corrente alternada senoidal. O gerador ideal de corrente mantém a corrente constante, independentemente da tensão em seus terminais.

**Figura 3.6**

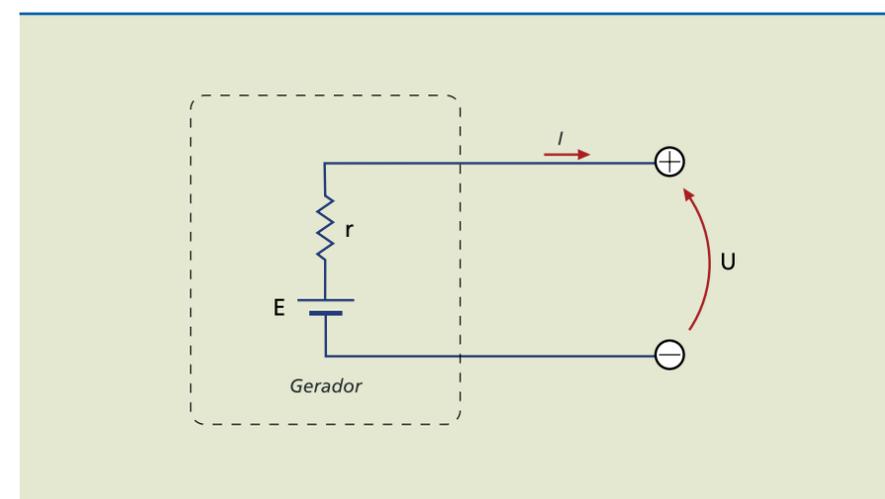
(a) Gerador de corrente contínua ideal e (b) gerador de corrente alternada, com as respectivas curvas da corrente em função do tempo.



Na prática, fontes de corrente são encontradas em carregadores de bateria e máquinas de solda elétrica.

### 3.1.2 Gerador de tensão contínua não ideal

Além de manter constante a tensão em seus terminais, independentemente da corrente fornecida, os geradores ideais não têm perdas, ou seja, sua resistência interna é nula. Na prática, porém, isso não acontece. Quando fornecem corrente, a tensão em seus terminais fica menor. Há perdas, provocadas, entre outros motivos, pelo efeito Joule, no conjunto de resistências do gerador (resistências internas). Uma forma de representar a queda de tensão e as perdas em um gerador real é associar uma resistência  $r$  em série com um gerador de tensão ideal  $E$  (figura 3.7).



**Figura 3.7**

Representação de gerador não ideal.

As variáveis envolvidas nesse esquema são:

- $E$ : força eletromotriz, representada sob a forma de tensão constante (fonte ideal de tensão). Corresponde à tensão gerada.
- $r$ : resistência interna do gerador.
- $I$ : corrente que percorre o gerador, dependendo da carga que estiver ligada nele. Sai do terminal positivo do gerador (corrente convencional).
- $U$ : tensão nos terminais do gerador efetivamente fornecida ao circuito, já descontada a queda de tensão na resistência interna.

Analisando a figura 3.7, obtém-se a equação que dita o comportamento da tensão de saída  $U$ :

$$U = E - rI \quad (3.1)$$

$E$  e  $r$  são constantes que dependem dos elementos construtivos internos do gerador. O comportamento das variáveis  $U$  e  $I$  é ditado pela equação de primeiro grau  $U = f(I)$ , cujo gráfico é denominado curva característica do gerador. Essa curva (figura 3.8) é uma reta, facilmente determinada por dois pontos significativos:



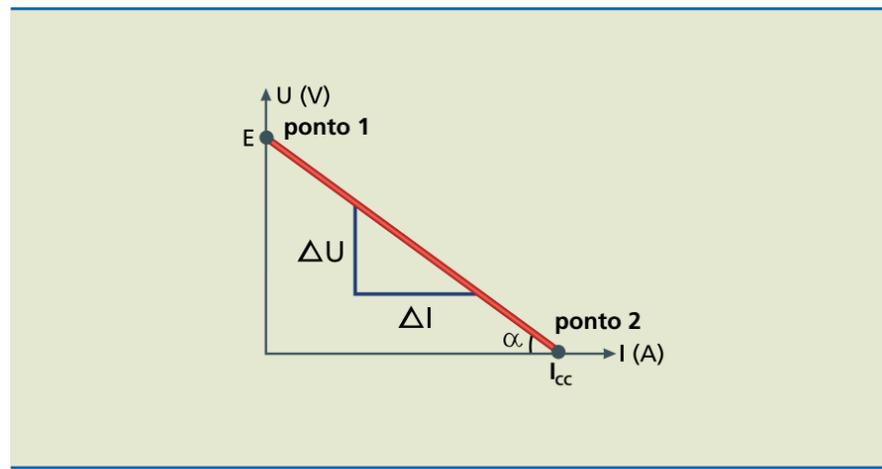
- **Primeiro ponto:** para  $I = 0$ , que representa um circuito aberto, sem carga, a tensão de saída vale  $U = E$ .
- **Segundo ponto:** para  $U = 0$ , que significa colocar os terminais do gerador em curto-circuito, a corrente de saída é:

$$I = I_{cc} = \frac{E}{r}$$

Com os dois pontos, obtém-se a reta da figura 3.8.

**Figura 3.8**

Curva característica de gerador de tensão não ideal.



A inclinação da reta determina a resistência interna do gerador:

$$r = \text{tg} \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 1 \text{ cte} \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Rendimento energético ( $\eta$ ) de um gerador

Quando se multiplicam os dois lados da equação 3.1 por  $I$  (corrente elétrica), obtém-se a equação do balanço de potências do gerador:

$$UI = EI - rI^2 \Rightarrow P_{\text{útil}} = P_{\text{Total gerada}} - P_{\text{dissipada}} \Rightarrow P_u = P_T - P_d \quad (3.3)$$

A potência útil ( $P_u = UI$ ) corresponde à potência total ( $P_T = EI$ ) menos a potência dissipada ( $P_d = rI^2$ ). A parcela dissipada provoca o aquecimento do gerador.

Define-se rendimento, ou eficiência energética do gerador, como a relação entre a potência útil e a potência total gerada por ele:

$$\eta = \frac{P_u}{P_T} \Rightarrow 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.4)$$

O rendimento  $\eta$  é adimensional, ou seja, não tem unidade de medida. Seu valor varia de 0 a 1. Quanto menores as perdas, maior a eficiência energética do gerador (rendimento) e maior o valor de  $\eta$ . Costuma-se também quantificar o rendimento em valores percentuais:

$$\eta_{\%} = \frac{P_u}{P_T} \cdot 100\% \Rightarrow 0 \leq \eta_{\%} \leq 100\% \quad (3.5)$$

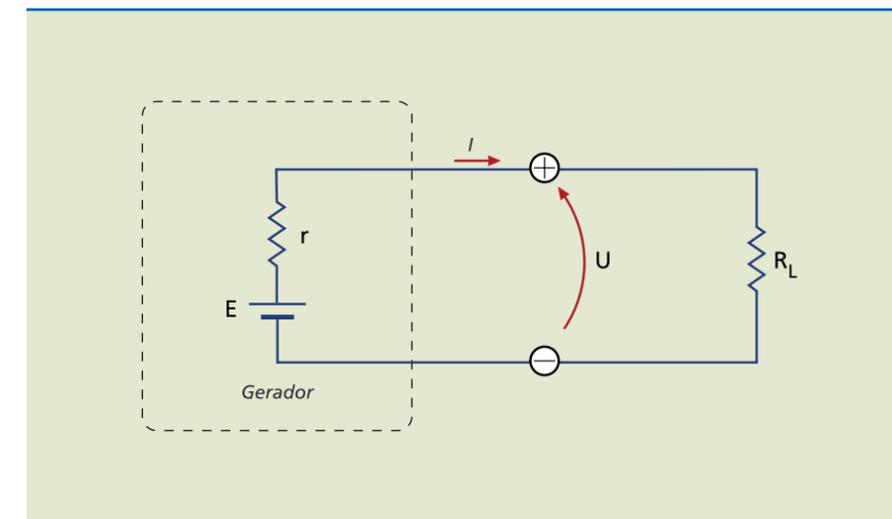
Das equações 3.4 e 3.3, obtém-se:

$$\eta = \frac{P_u}{P_T} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E} \Rightarrow \eta = \frac{E - rI}{E} \cdot 1 \Rightarrow 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.6)$$

A equação 3.6 apresenta o rendimento em função das tensões  $U$  e  $E$ . Quanto menor a tensão na saída, maior a queda de tensão e menor o rendimento energético do gerador.

### 3.1.4 Máxima transferência de potência de um gerador à carga

No circuito da figura 3.9, a potência útil fornecida pelo gerador é consumida pelo resistor de carga  $R_L$ .



**Figura 3.9**

Gerador não ideal conectado à carga  $R_L$ .

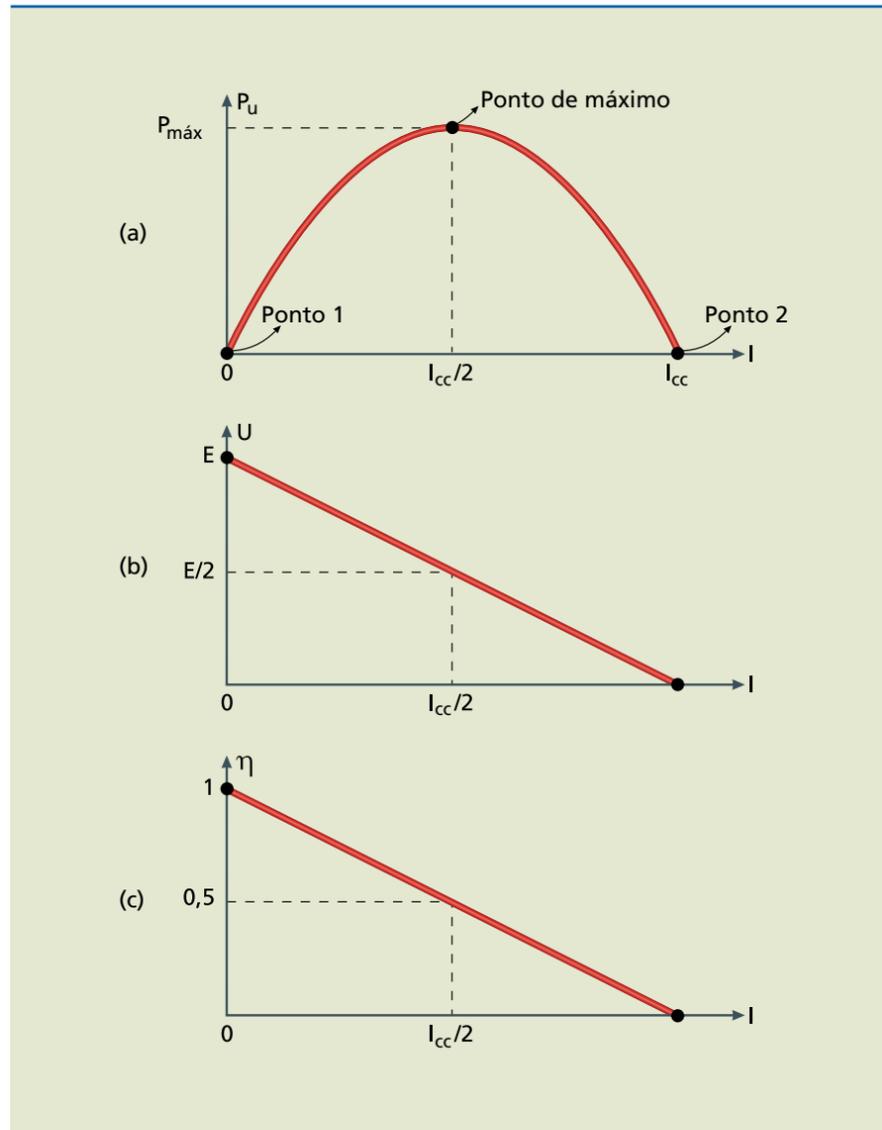
Ao analisar a curva do gerador (figura 3.10a), nota-se que para o ponto 1 a tensão vale  $U = E$  e a corrente é nula, resultando em potência fornecida pelo gerador nula ( $P_u = 0$ ). O mesmo acontece para o ponto 2, no qual  $I = I_{cc}$  e a tensão de saída é nula ( $U = 0$ ), resultando em potência fornecida nula ( $P_u = 0$ ). Para as demais condições, tem-se tensão, corrente e potência fornecida não nulas dadas pela equação 3.7:

$$P_u = UI = EI - rI^2 \quad (3.7)$$



**Figura 3.10**

Gráficos (a) da tensão de saída, (b) da potência útil e (c) do rendimento, todos para um gerador não ideal em função da corrente.



Como  $E$  e  $r$  são constantes, a equação 3.7,  $P_u = f(I)$ , é de segundo grau, cujo gráfico é uma parábola determinada por três pontos: dois deles são as raízes ou zeros da equação (em que  $P_u = 0$ ) e o terceiro é o ponto de máximo ( $P_u = P_{m\acute{a}x}$ ).

#### Cálculos para determinação dos pontos

- **Primeiro ponto:**  $I=0 \Rightarrow P_u = E \cdot 0 = 0$
- **Segundo ponto:**  $I = I_{cc}$  ( $U = 0$ )  $\Rightarrow P_u = 0 \cdot I_{cc} = 0$
- **Ponto de máximo** ( $P_u = P_{m\acute{a}x}$ ): ocorre no ponto médio entre as duas raízes, ou seja, para  $I = I_{cc}/2$ . Substituindo  $I = I_{cc}/2 = E/(2r)$  na equação 3.7, obtém-se:

$$P_{m\acute{a}x} = P_u(I = I_{cc}/2) = EI - rI^2 = E \frac{I_{cc}}{2} - r \left( \frac{I_{cc}}{2} \right)^2 = E \frac{E}{2r} - r \left( \frac{E}{2r} \right)^2 = \frac{E^2}{2r} - \frac{E^2}{4r} = \frac{E^2}{4r} \quad (3.8)$$

A figura 3.10b ilustra o comportamento da potência útil  $P_u$  em função da corrente de carga  $I$ , mostrando os três pontos significativos da parábola.

A condição de máxima transferência de potência ocorre para  $I = I_{cc}/2$ .

Pela equação característica do gerador (3.1), obtém-se a tensão de saída para a condição de máxima transferência de potência  $P_u = P_{m\acute{a}x}$ , impondo-se  $I = I_{cc}/2$ :

$$U = E - r \frac{I_{cc}}{2} \quad (3.9)$$

Como  $I_{cc} = E/r$ :

$$U = E - r \frac{E}{2r} = \frac{E}{2} \quad (3.10)$$

A tensão de saída do gerador cai para a metade da tensão em vazio ( $U = E/2$ ) para a condição de máxima transferência de potência.

Para obter  $U = E/2$ , com corrente de  $I = I_{cc}/2 = U/R_L$ , a resistência de carga  $R_L$  deverá ter valor que pode ser obtido pela equação 3.1:

$$U = \frac{E}{2} = E - rI = E - r \frac{U}{R_L} = E - r \frac{E/2}{R_L} \quad (3.11)$$

Reescrevendo 3.11:

$$\frac{E}{2} = E - r \frac{E}{2R_L} \quad (3.12)$$

Dividindo os dois lados por  $E$  e isolando  $R_L$ , obtém-se  $R_L = r$ .

A condição de máxima transferência de potência ocorre quando a resistência da carga é igual à resistência interna do gerador ( $R_L = r$ ).



O rendimento para a condição de máxima transferência de potência pode ser calculado utilizando a equação 3.4:

$$\eta = \frac{P_u}{P_T} = \frac{U}{E} = \frac{E/2}{E} = 0,5 \quad (3.13)$$

Para a condição de máxima transferência de potência, o rendimento do gerador é 0,5 (50%). Metade da energia gerada vai para a carga, e a outra metade é dissipada.

A figura 3.10c mostra o comportamento do rendimento em função da corrente.

#### Sugestão de atividade

Na situação de máxima transferência de potência útil, o rendimento cai para a metade. É interessante comparar esse número com o de outras situações, como transferência de 75%, 50%, 25% e 5% da potência útil. Deve-se observar que valores menores de potência útil proporcionam menor queda de tensão na carga e oferecem rendimento mais elevado.

#### Exemplo

Para um gerador de força eletromotriz 15 V e resistência interna 2 Ω, determine:

- A corrente de curto-circuito ( $I_{cc}$ ).
- A potência útil máxima ( $P_{máx}$ ).
- As potências útil, total e dissipada, e o rendimento do gerador, quando percorrido por uma corrente de 2 A.

*Solução:*

a) Como  $U = 0$ , obtém-se  $I_{cc} = \frac{E}{r} = \frac{16}{2} = 8,00 \text{ A}$ .

b) Pela equação 3.8, obtém-se  $P_{máx} = \frac{E^2}{4r} = \frac{16^2}{4 \cdot 2} = 32 \text{ W}$ .

c) Pela equação 3.1, calcula-se a tensão na saída do gerador:

$$U = E - rI = 16 - 2 \cdot 2 = 12,0 \text{ V}$$

A potência útil é  $P_u = UI = 12 \cdot 2 = 24,0 \text{ W}$ .

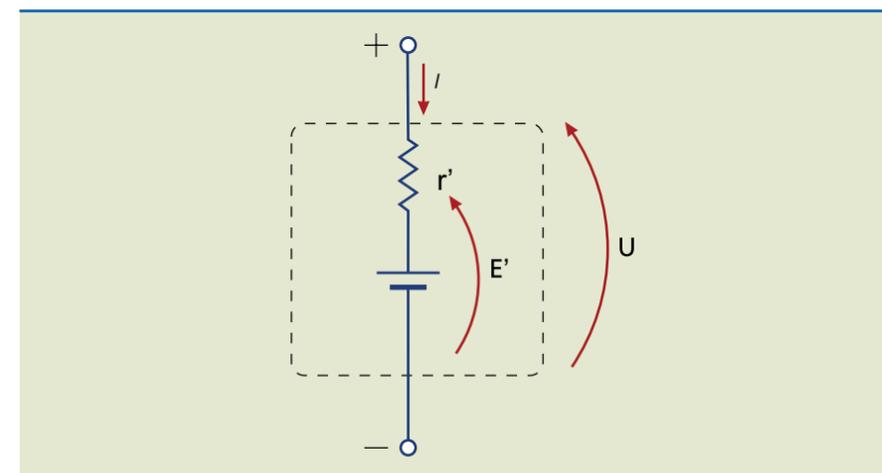
A potência total é  $P_T = 16 \cdot 2 = 32,0 \text{ W}$ .

A potência dissipada é  $P_d = rI^2 = 2 \cdot 2^2 = 8,00 \text{ W}$ .

O rendimento do gerador é  $\eta = U/E = 12/16 = 0,750$ .

## 3.2 Receptores

São dispositivos que retiram energia elétrica do circuito e a convertem em outra forma. Um exemplo de receptor é o motor elétrico, que transforma a energia elétrica em mecânica de movimento, ou uma lâmpada incandescente, que transforma energia elétrica em luminosa e térmica. Uma bateria de carro, durante o processo de recarga, pode ser considerada um receptor que converte a energia elétrica em química. O comportamento de todos esses tipos de receptores está adequadamente descrito na figura 3.11. (É importante notar o sentido da corrente, entrando no receptor.)



**Figura 3.11**  
Esquema de receptor.

Nesse esquema empregam-se as variáveis:

- $U$ : tensão recebida do gerador.
- $E'$ : força contraeletromotriz.
- $r'$ : resistência interna do receptor.
- $I$ : corrente que percorre o receptor (por convenção, entra pelo polo positivo, ao contrário do gerador).

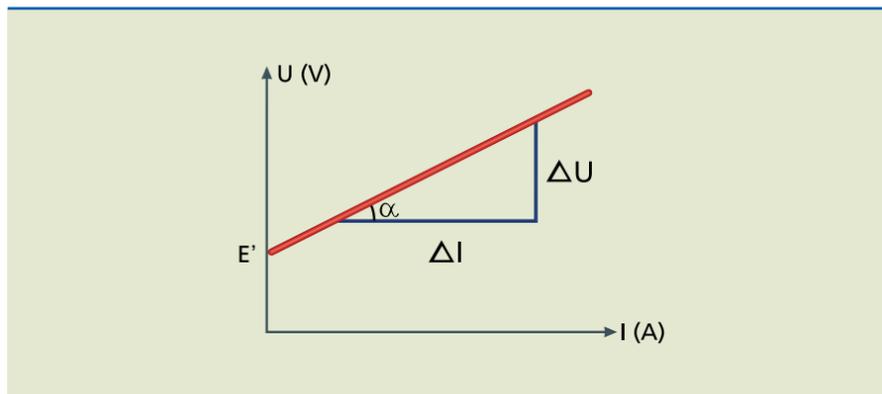
A equação característica do receptor da figura 3.11 é:

$$U = E' + r'I \quad (3.14)$$

Como  $E'$  e  $r'$  são constantes,  $U = f(I)$  descreve uma função polinomial de primeiro grau (figura 3.12), graficamente representada por uma reta, que pode ser descrita a partir de um ponto conhecido e de sua inclinação.



**Figura 3.12**  
Curva característica de um receptor:



Um ponto facilmente determinado ocorre para  $I = 0$ , resultando em  $U = E'$ .

O coeficiente angular da reta é  $r'$ , ou seja:

$$r' = \text{tg}(\alpha) = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (3.15)$$

Assim, a reta será ascendente com ângulo  $\alpha$ , calculado pela equação:

$$\alpha = \text{arc tg } r' \quad (3.16)$$

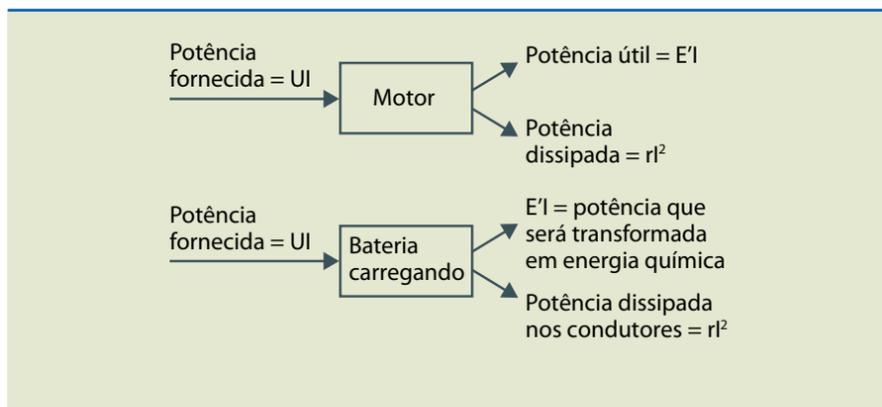
A equação das potências de um receptor será:

$$P_{\text{Total recebida}} = P_{\text{útil}} + P_{\text{dissipada}} \text{ ou } P_T = P_u + P_d \quad (3.17)$$

No caso de um motor,  $E'I$  corresponde à parcela que será transformada em energia mecânica, e  $rI^2$ , à potência dissipada nos condutores das bobinas, que se transforma em calor.

No caso de uma bateria sendo carregada,  $E'I$  corresponde à parcela que se transformará em energia química, e  $rI^2$ , à potência dissipada nos condutores e placas da bateria, provocando seu aquecimento.

**Figura 3.13**  
Distribuição da potência elétrica em um receptor:



Combinando as equações 3.14 e 3.17, obtém-se:

$$UI = E'I + r'I^2 \quad (3.18)$$

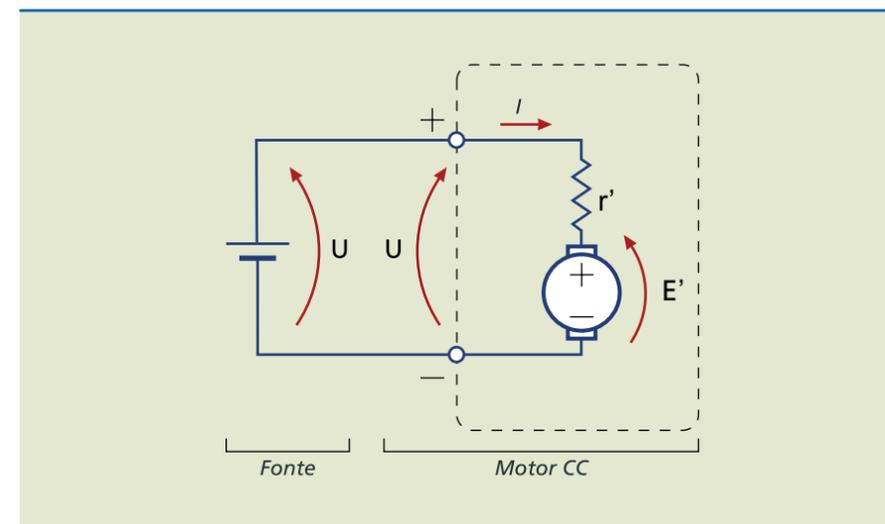
O rendimento do receptor é calculado por:

$$\eta = \frac{P_u}{P_T} = \frac{E'I}{UI} \Rightarrow \eta = \frac{E'}{U} \quad (3.19)$$

**Exemplo**

Um motor CC (corrente contínua) em funcionamento com força contraeletromotriz de 90 V e resistência interna de 5 Ω é ligado a uma rede de 110 V. Determine a corrente no circuito, as potências útil, total e dissipada do motor, bem como seu rendimento.

*Solução:*



**Figura 3.14**  
Motor ligado a fonte ideal.

Pela figura 3.14, utilizando a equação 3.14:

$$U = E' + r'I \Rightarrow 110 = 90 + 5 \cdot I$$

Daí obtém-se a corrente no motor:  $I = 4 \text{ A}$ .

A potência útil é  $P_u = E' I = 90 \cdot 4 = 360 \text{ W}$ .

A potência total consumida pelo motor é  $P_T = UI = 110 \cdot 4 = 440 \text{ W}$ .

A potência dissipada na resistência do motor é  $P_d = r'I^2 = 5 \cdot 4^2 = 80,0 \text{ W}$ .

O rendimento do motor é  $\eta = (E'/U) \cdot 100\% = 90/110 = 81,8\%$ .



**Observação importante**

Deve-se tomar muito cuidado ao interpretar os conceitos de potência útil e dissipada em um receptor. Para os exemplos do motor e da bateria, que têm fonte interna  $E'$ , os conceitos são muito claros.

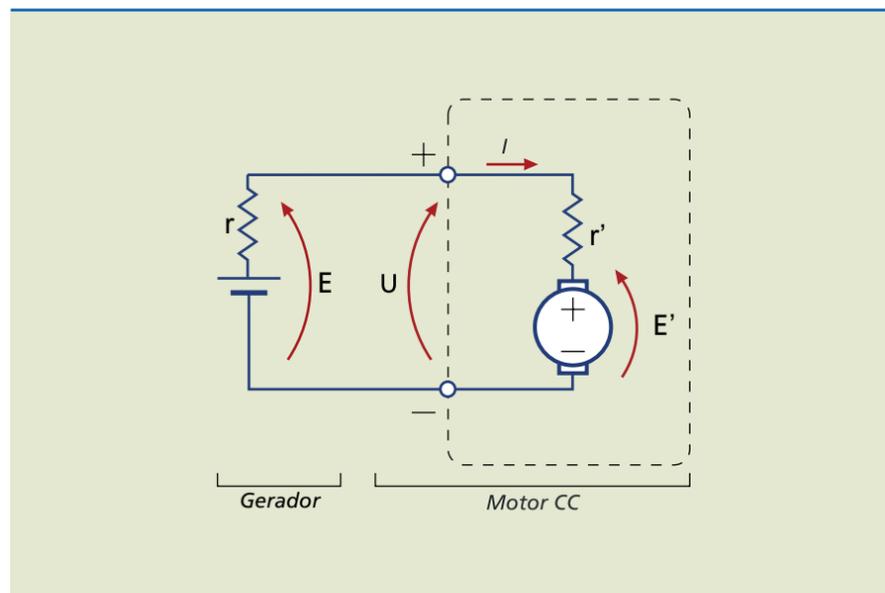
Se o receptor for uma resistência de aquecimento de um chuveiro,  $E' = 0$ . Porém, nesse caso, toda a potência convertida em calor é empregada para aquecer a água, que está em contato com a resistência. A potência útil é, então,  $ri^2$ .

**3.3 Operação conjunta de receptor e gerador**

Consideremos um receptor (por exemplo, um motor) ligado diretamente aos terminais do gerador, conforme indicado na figura 3.15. Nessa situação, tanto o gerador como o receptor estão sujeitos à tensão  $U$  em seus terminais. A corrente será a mesma para os dois. Isso define um ponto único de funcionamento do circuito, denominado ponto de operação, ou ponto quiescente, ou ainda ponto de trabalho.

**Figura 3.15**

Receptor conectado a gerador:



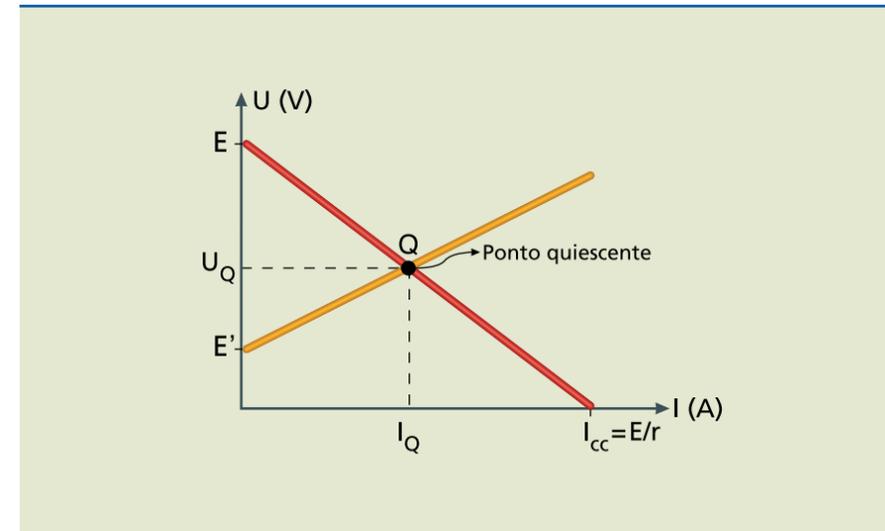
Como as tensões nos terminais são iguais a  $U$ , pode-se escrever:

$$U = E - ri = E' + r'i \quad (3.20)$$

Isolando a corrente na equação 3.20, obtém-se:

$$I = \frac{E - E'}{r + r'} \quad (3.21)$$

Pode-se visualizar a solução graficamente na figura 3.16. Nela as duas curvas características são superpostas, indicando o ponto de operação  $Q$ , que é caracterizado pelo cruzamento das curvas características do gerador (curva crescente) e do receptor (curva decrescente). Esse é o único ponto das curvas em que as tensões terminais e correntes no gerador e receptor são iguais ( $U = U_Q$  e  $I = I_Q$ ).



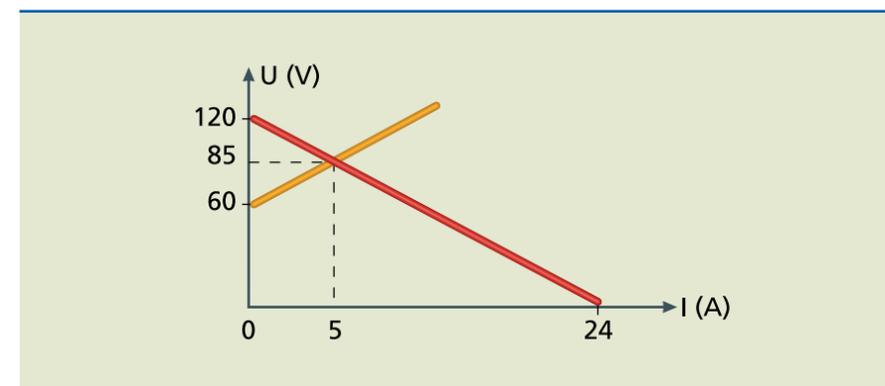
**Figura 3.16**

Curvas características do gerador e do receptor e ponto quiescente.

Observe-se que  $E$  deve ser maior que  $E'$  para que a corrente possa fluir do gerador para o receptor.

**Exemplo**

Dadas as curvas características de um gerador (curva crescente) e de um motor (curva decrescente) na figura 3.17, determine:



**Figura 3.17**

Curvas características do gerador e do receptor.

- A equação característica do gerador.
- A equação característica do receptor.
- A potência útil máxima do gerador.
- O ponto quiescente, as potências total, útil e dissipada, e o rendimento no gerador e no motor, com este ligado diretamente ao gerador.

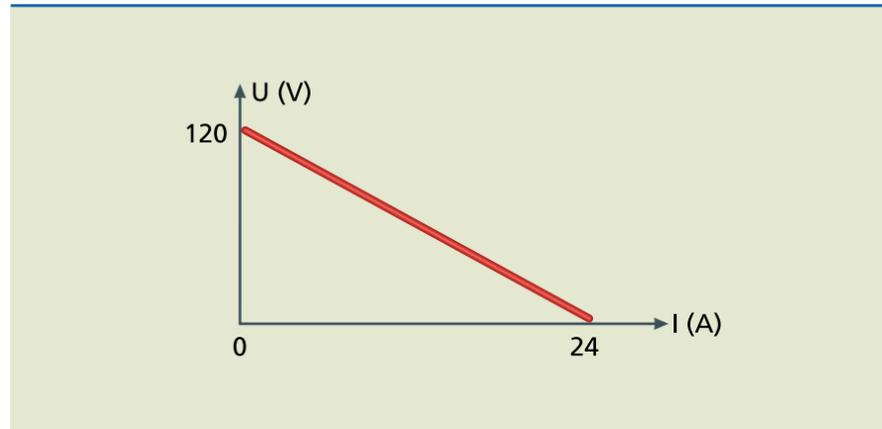


*Solução:*

- a) De início, considera-se isoladamente a curva característica do gerador (figura 3.18).

**Figura 3.18**

Curva característica do gerador:



Para  $I = 0$ , tem-se  $E = U = 120 \text{ V}$ .

Para  $U = 0$ , tem-se  $I = I_{cc} = 24 \text{ A} = E/r = 120/r$ . Daí obtém-se  $r = 5\Omega$ .

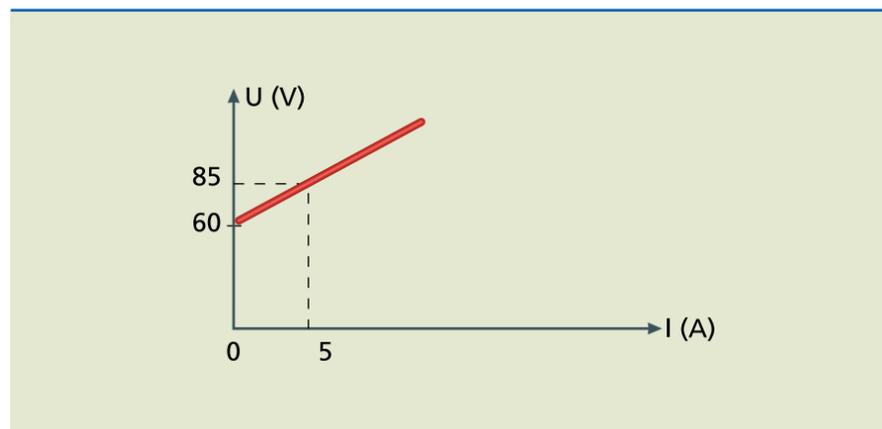
Assim, a equação característica do gerador é:

$$U = 120 - 5I$$

- b) Isola-se agora a curva característica do motor (figura 3.19).

**Figura 3.19**

Curva característica do motor:



Da figura 3.19, verifica-se que, para  $I = 0$ , tem-se  $E = U = 60 \text{ V}$ .

Para calcular a resistência, deve-se notar que, para uma variação na corrente de 0 a 5 A ( $\Delta I = 5 \text{ A}$ ), a tensão nos terminais do motor vai de 60 a 85 V ( $\Delta U = 25 \text{ V}$ ). Pela equação 3.15, o coeficiente angular da reta  $\Delta I/\Delta U$  é a própria resistência interna  $r'$ , que vale  $r' = 25/5 = 5\Omega$ .

A resistência interna também pode ser obtida pela equação característica do motor:

$$E' = 60 + r'I$$

O gráfico mostra que, para  $I = 5 \text{ A}$ ,  $U = 85 \text{ V}$ , que substituídos na equação característica fornecem:

$$85 = 60 + r'5$$

Daí obtém-se:

$$r' = 5\Omega$$

Finalmente, obtém-se a equação característica do motor:

$$E' = 60 + 5I$$

- c) Sabe-se que a máxima potência que o gerador pode fornecer é:

$$P_{\text{máx}} = \frac{E^2}{4r} = \frac{120^2}{4 \cdot 5} = 720 \text{ W}$$

- d) Com o receptor conectado ao gerador, ambos têm a mesma tensão terminal, valendo a relação:

$$60 + 5I = 120 - 5I$$

Daí obtém-se a corrente no circuito, que é  $I = 6,00 \text{ A}$ .

A tensão terminal pode ser obtida tanto pela equação característica do motor como do gerador. Pela equação do gerador, obtém-se:

$$U = 120 - 5 \cdot 6 = 90,0 \text{ V}$$

Apenas para conferir, se for utilizada a equação do motor, obtém-se:

$$U = 60 + 5 \cdot 6 = 90,0 \text{ V}$$

O gerador fornece ao motor uma potência útil de:

$$P_{u_{\text{gerador}}} = UI = 90 \cdot 6 = 540 \text{ W}$$

Potência dissipada no gerador:

$$P_{d_{\text{gerador}}} = rI^2 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ W}$$



Potência total produzida pelo gerador:

$$P_{T\_gerador} = P_u + P_d = 540 + 180 = 760 \text{ W}$$

Rendimento do gerador:

$$\eta_{gerador} = P_{u\_gerador} / P_{T\_gerador} = (540/760) \cdot 100\% = 75,0\%$$

A potência total recebida pelo motor é igual à potência útil entregue pelo gerador, que é:

$$P_{T\_motor} = 540 \text{ W}$$

Potência dissipada no motor:

$$P_{d\_motor} = r'I^2 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ W}$$

Potência útil no motor:

$$P_{u\_motor} = E'I = 60 \cdot 6 = 360 \text{ W}$$

Rendimento do motor:

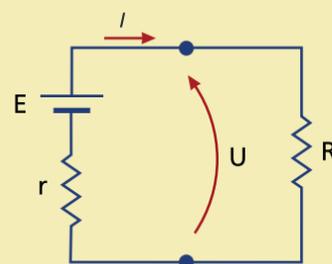
$$\eta_{motor} = P_{u\_motor} / P_{T\_motor} = (360/540) \cdot 100\% = 66,7\%$$

**Figura 3.20**

Gerador não ideal ligado a resistor.

**Caso particular:**  $E' = 0$

Se  $E' = 0$ , como acontece no caso de resistores de aquecimento e lâmpadas incandescentes, a potência do receptor é dissipada em forma de calor (efeito Joule).



Como as tensões nos terminais são iguais a U, pode-se escrever:

$$U = E - rI = r'I \quad (3.22)$$

Isolando a corrente, obtém-se:

$$I = \frac{E}{r + r'} \quad (3.23)$$

### 3.4 Associação de geradores

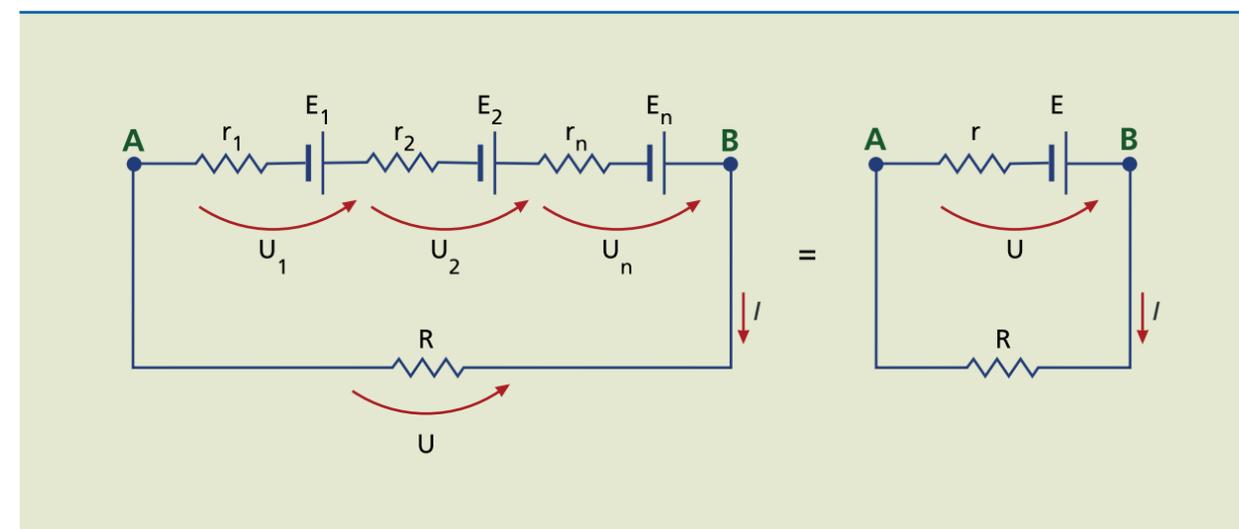
Geradores e receptores podem ser associados a fim de produzir um resultado que não seria conseguido com apenas um deles. Como acontece com os resistores, é possível construir associações cujo efeito é o mesmo de um único resistor equivalente. Nesta seção, veremos os procedimentos para calcular os parâmetros do gerador equivalente para as associações em série e em paralelo.

#### 3.4.1 Associação em série de geradores

Esse tipo de associação é empregado para a obtenção de tensões maiores que a dos geradores individuais. A figura 3.21 apresenta  $n$  geradores conectados em série.

**Figura 3.21**

Associação em série de geradores e seu circuito equivalente simplificado.



A tensão total  $U$  é calculada utilizando a segunda **lei de Kirchhoff**:

As leis de Kirchhoff serão estudadas no capítulo 6.

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = R \cdot I \quad (3.24)$$

No circuito equivalente da figura 3.21,  $U = E - rI$ . A substituição desse valor de  $U$  na equação 3.24 resulta em:

$$E - rI = (E_1 - r_1I) + (E_2 - r_2I) + \dots + (E_n - r_nI) \quad (3.25)$$

Agrupando as tensões e resistências, chega-se a:

$$E - rI = (E_1 + E_2 + \dots + E_n) - I(r_1 + r_2 + \dots + r_n) \quad (3.26)$$

Comparando os dois lados da equação, obtém-se:

$$\begin{cases} E = E_1 + E_2 + \dots + E_n \\ r = r_1 + r_2 + \dots + r_n \end{cases} \quad (3.27)$$



**Conclusão**

Em uma associação em série de geradores, a força eletromotriz (f.e.m.) do modelo equivalente é a soma das f.e.m. dos geradores.

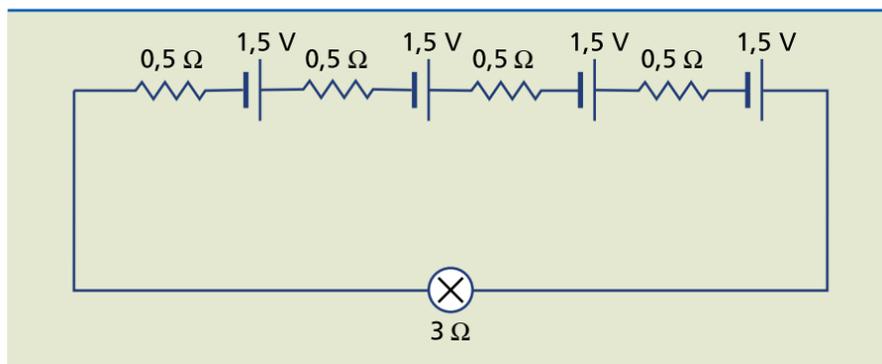
A resistência interna equivalente é a soma das resistências dos geradores.

**Exemplo**

Uma lâmpada incandescente com resistência de  $3 \Omega$  é ligada a quatro pilhas em série, cada uma com força eletromotriz de  $1,5 \text{ V}$  e resistência interna de  $0,5 \Omega$  (figura 3.22). Determine a corrente na lâmpada e a potência por ela consumida.

**Figura 3.22**

Associação em série de pilhas alimentando lâmpada.



*Solução:*

Tensão do gerador equivalente:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 4 \cdot 1,5 = 6,00 \text{ V}$$

Resistência do gerador equivalente:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 4 \cdot 0,5 = 2 \Omega$$

Conectando a lâmpada, obtém-se:

$$U = E - rI = 6 - 2I = 3I$$

Corrente no circuito:

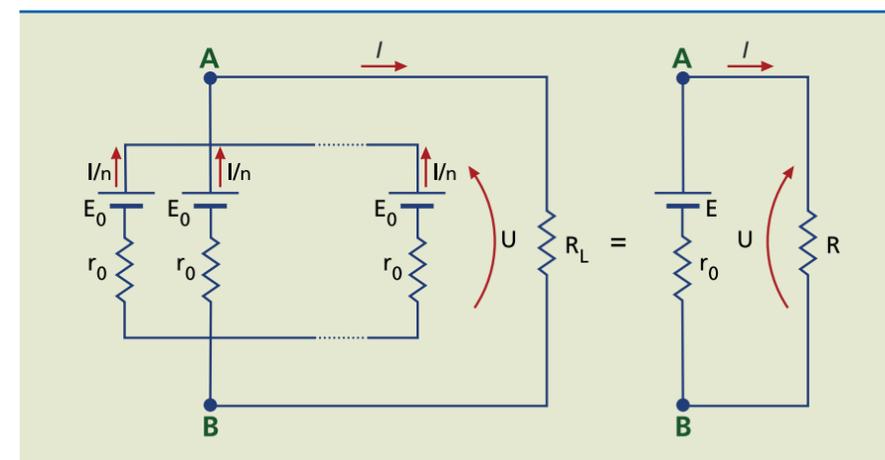
$$I = 1,20 \text{ A}$$

Potência consumida pela lâmpada:

$$P_{\text{lâmpada}} = R_{\text{lâmpada}} I^2 = 3 \cdot 1,20^2 = 4,32 \text{ W}$$

**3.4.2 Associação em paralelo de  $n$  geradores iguais**

Nessa associação (figura 3.23), todos os polos positivos estão interligados, assim como todos os negativos. A tensão nos terminais dos geradores é a mesma. A corrente total é a soma das correntes individuais. Como as tensões e resistências individuais são iguais, a corrente em cada gerador vale  $I/n$ , sendo  $I$  a corrente na carga  $R_L$ .



**Figura 3.23**

Associação em paralelo de  $n$  geradores iguais e seu gerador equivalente.

A tensão nos terminais de cada gerador é:

$$U = E_0 - r_0 \frac{I}{n} = R_L I \quad (3.28)$$

A tensão nos terminais do gerador equivalente é:

$$U = E - rI = R_L I \quad (3.29)$$

A associação de geradores e o gerador equivalente devem apresentar a mesma tensão  $U$  e corrente  $I$  em seus terminais. Comparando as equações 3.28 e 3.29, verifica-se que isso apenas ocorre se:

$$\begin{cases} E = E_0 \\ r = \frac{r_0}{n} \end{cases} \quad (3.30)$$

Na associação em paralelo de  $n$  geradores iguais, a força eletromotriz equivalente é a mesma do gerador individual, e a resistência interna equivalente é a associação em paralelo de resistências iguais, ou seja, o valor individual dividido pelo número de geradores.



A vantagem da associação em paralelo é a possibilidade de obter correntes elevadas na carga, recurso necessário, por exemplo, para a partida de certos motores.

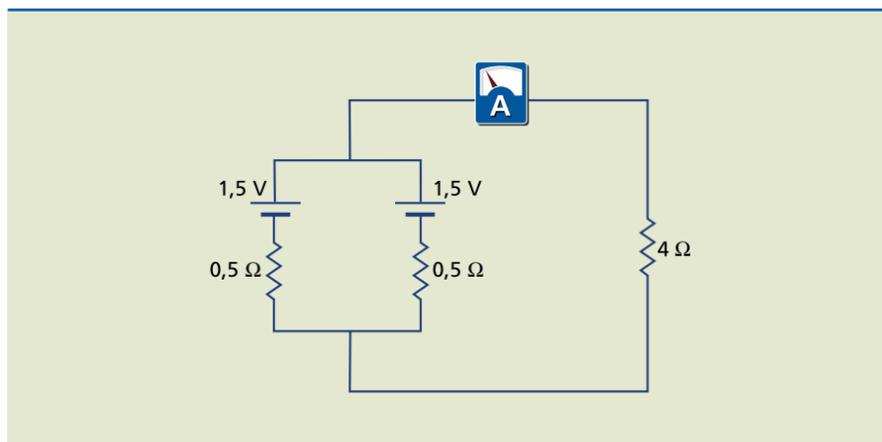
Em pilhas e baterias, no entanto, a associação em paralelo deve ser evitada, porque, mesmo com a carga  $R_L$  desconectada, pode haver corrente circulando entre os geradores se houver alguma diferença, mesmo que pequena, entre as tensões. Nesse caso, o de menor tensão nos terminais vai funcionar como receptor, o que promoverá dissipação de energia, causando rápida descarga da pilha ou bateria.

**Exemplo**

Determine a leitura do amperímetro ideal (figura 3.24).

**Figura 3.24**

Geradores em paralelo alimentando carga.

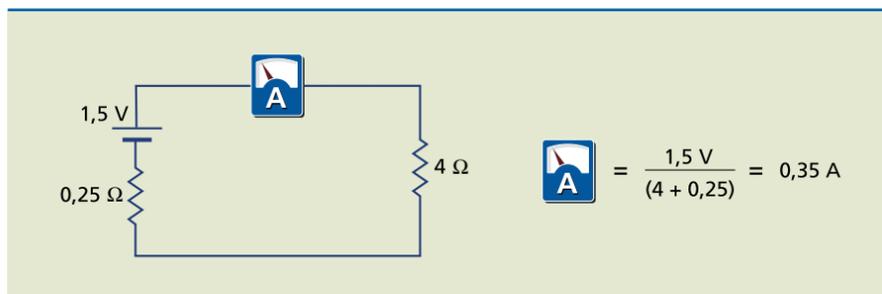


*Solução:*

Obtém-se inicialmente o gerador equivalente à associação em paralelo de dois geradores. O novo circuito é apresentado na figura 3.25.

**Figura 3.25**

Simplificação do circuito da figura 3.24.

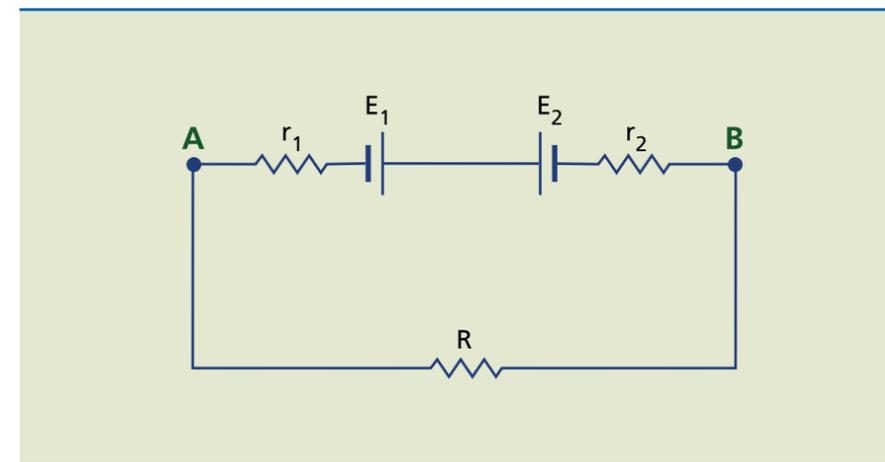


Com base no circuito simplificado, obtém-se:

$$I = \frac{1,5}{4 + 0,25} = 0,353 \text{ A}$$

**3.4.3 Associação de dois geradores em oposição**

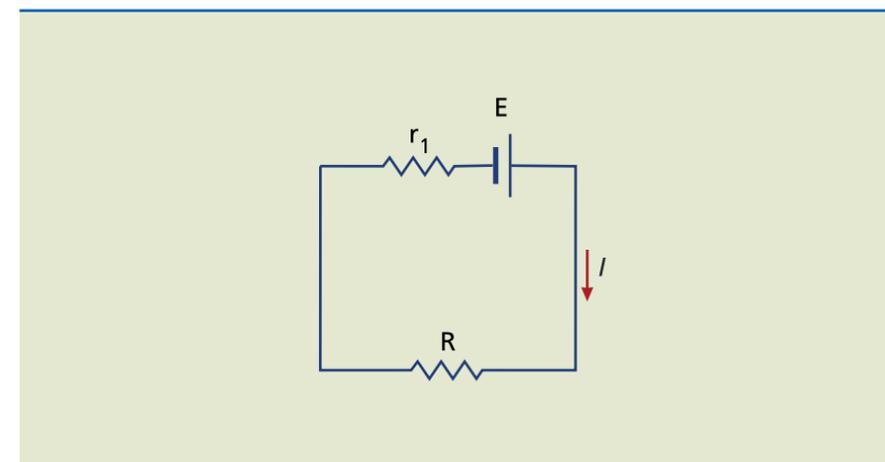
O polo positivo de um gerador é ligado ao positivo de outro, ou vice-versa (figura 3.26).



**Figura 3.26**

Associação de geradores em oposição.

Consideremos  $E_1 > E_2$ . Nesse caso, há prevalência de  $E_1$  e a corrente percorre o circuito no sentido horário, porque a força eletromotriz resultante tem a mesma polaridade de  $E_1$  (figura 3.27).



**Figura 3.27**

Simplificação do circuito da figura 3.26.

Tensão do gerador equivalente:

$$E = E_1 - E_2 \quad (3.31)$$

Resistência do gerador equivalente:

$$r = r_1 + r_2 \quad (3.32)$$

O gerador de menor força eletromotriz comporta-se como receptor, em virtude do sentido da corrente elétrica resultante.

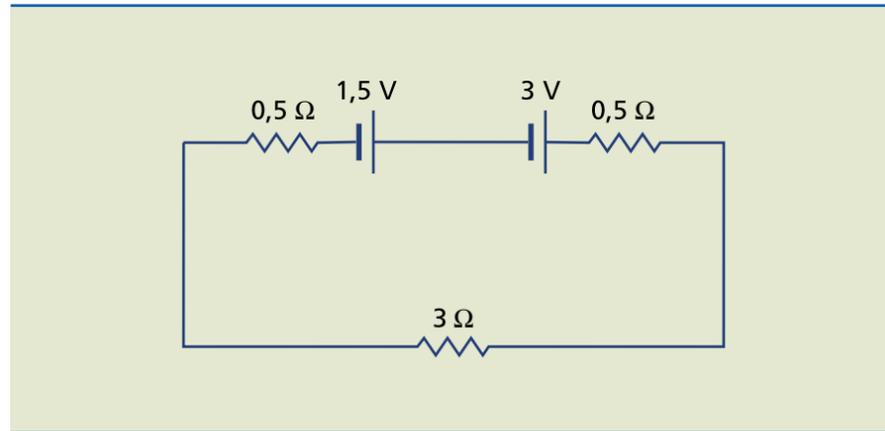


**Exemplo**

Determine a corrente elétrica no circuito da figura 3.28 e seu sentido.

**Figura 3.28**

Associação em série de geradores em oposição.

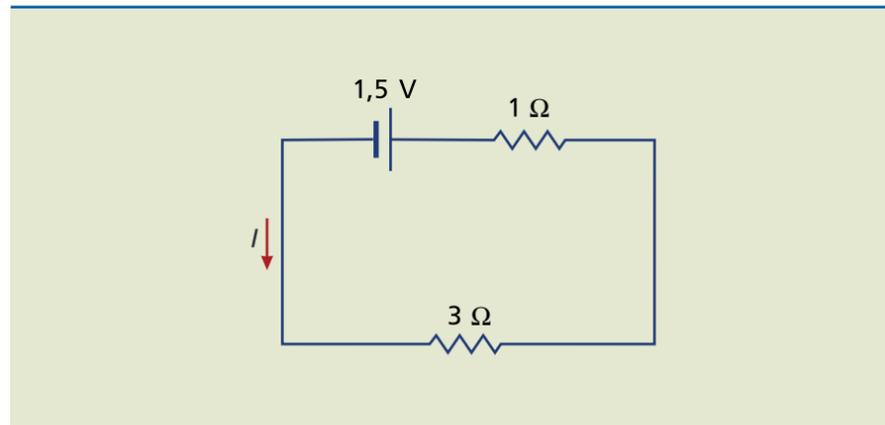


*Solução:*

Substituindo os dois geradores da figura 3.28 pelo respectivo gerador equivalente, obtém-se o circuito da figura 3.29.

**Figura 3.29**

Simplificação do circuito da figura 3.28.

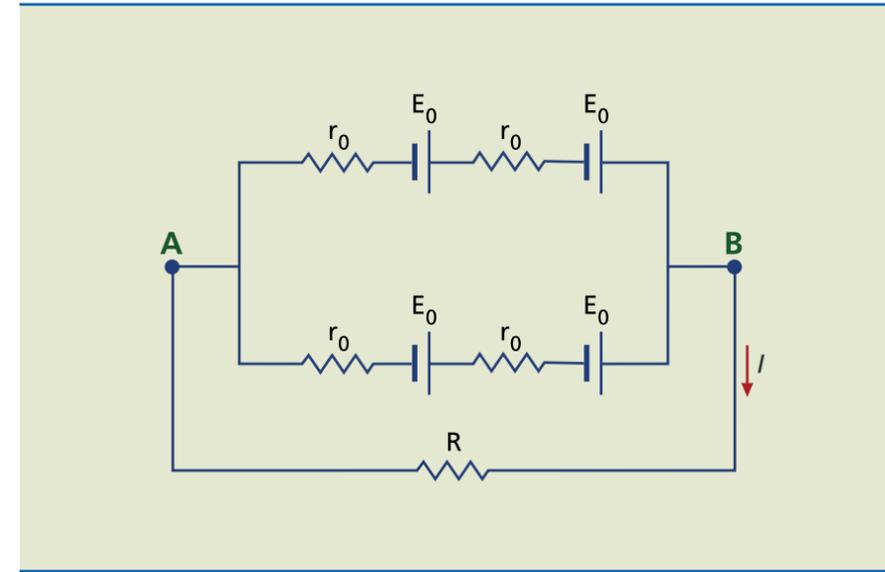


Devido à predominância do gerador de força eletromotriz 3 V, a corrente terá sentido anti-horário, com intensidade:

$$I = \frac{1,5}{3 + 1} = 0,375 \text{ A}$$

**3.4.4 Associação mista de geradores**

Teoricamente, é possível realizar qualquer combinação na associação de geradores, mas poucas têm aplicação prática. A figura 3.30 mostra um exemplo em que se pretende obter tensão e corrente elevadas.



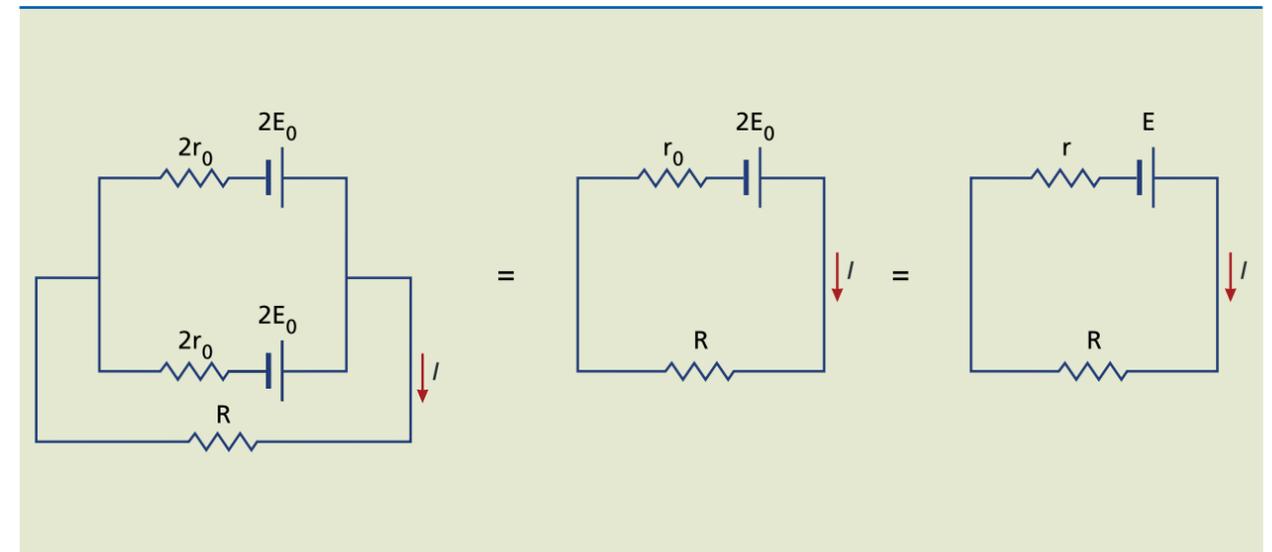
**Figura 3.30**

Associação em série-paralelo de geradores.

O circuito é simplificado conforme apresentado na figura 3.31.

**Figura 3.31**

Simplificações sucessivas do circuito da figura 3.30.



Tensão do gerador equivalente:

$$E = 2E_0 \quad (3.33)$$

Resistência interna do gerador equivalente:

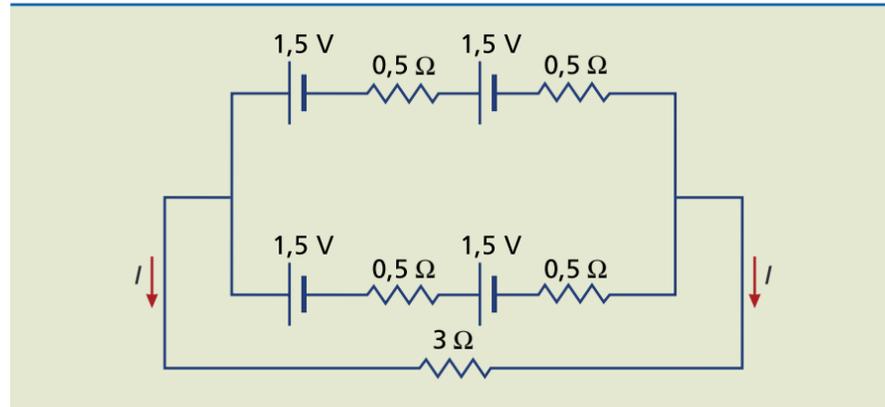
$$R = r_0 \quad (3.34)$$

**Exemplo**

Determine a corrente I no circuito da figura 3.32.



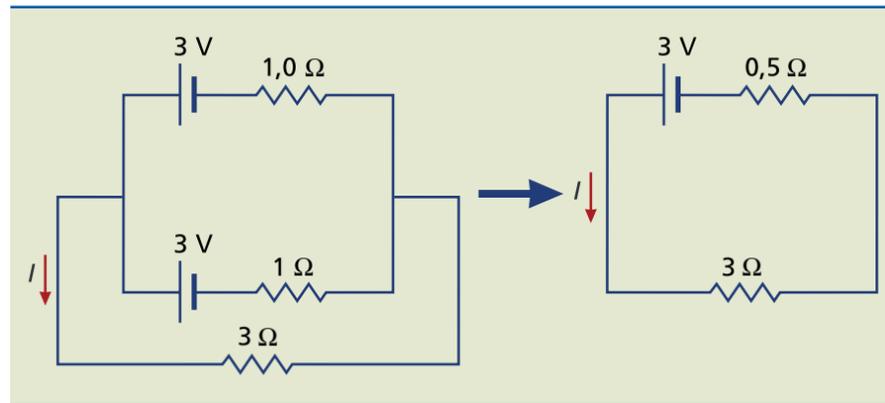
**Figura 3.32**  
Associação em série-paralelo de geradores.



*Solução:*

A figura 3.33 mostra as simplificações sucessivas do circuito da figura 3.32.

**Figura 3.33**  
Simplificações sucessivas do circuito da figura 3.32.



Com base nesse circuito, obtém-se:

$$I = \frac{3}{3 + 0,5} = 0,857 \text{ A}$$

# Capítulo 4

## Análise de circuitos elétricos básicos: em série, em paralelo e misto



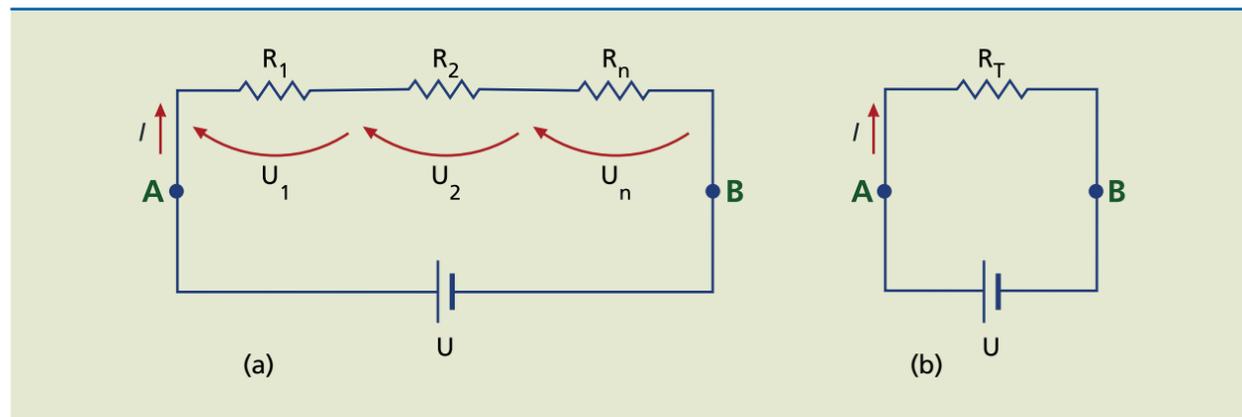
O circuito elétrico mais simples que existe é constituído pela ligação de um gerador a uma resistência. Circuitos mais complexos podem ser classificados em circuitos em série, em paralelo ou misto, dependendo das ligações. Aqui, serão estudadas as características de tensão, corrente e potência elétrica para os três casos. Inicialmente considera-se um único gerador.

#### 4.1 Circuito em série

A figura 4.1 ilustra uma associação em série de  $n$  resistores conectada a uma fonte de tensão  $U$ .

Figura 4.1

(a) Circuito em série e  
(b) circuito equivalente.



No circuito da figura 4.1a existe apenas um caminho a ser percorrido pela corrente elétrica para sair do ponto A e chegar ao B. Logo, a mesma corrente percorrerá todas as resistências do circuito. Deve-se lembrar que os pontos A e B são aqueles em que a fonte do circuito está ligada. Esse circuito pode ser visto como se fosse um resistor equivalente de valor  $R_T$  ligado entre os terminais A e B, conforme ilustrado na figura 4.1b.

Pela lei de Ohm, calcula-se a corrente  $I$  no circuito:

$$I = cte = \frac{U}{R_T} \quad (4.1)$$

A passagem da corrente elétrica  $I$  em cada uma das resistências dá origem a uma tensão sobre ela, também denominada queda de tensão. Aplicando a lei de Ohm, calcula-se a queda de tensão em cada um dos resistores:

$$\begin{cases} U_1 = I \cdot R_1 \\ U_2 = I \cdot R_2 \\ U_3 = I \cdot R_3 \\ \vdots \\ U_n = I \cdot R_n \end{cases} \quad (4.2)$$

Pela segunda lei de Kirchhoff, tem-se:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = I (R_1 + R_2 + \dots + R_n) = I \cdot R_T = U \quad (4.3)$$

Pode-se afirmar que, em um circuito em série, a tensão total do gerador é igual à soma das tensões, ou quedas de tensão, nas várias resistências do circuito. Por isso, o circuito em série é também chamado divisor de tensão.

#### Cálculo da resistência equivalente em circuito em série

Da equação 4.3, obtém-se:

$$I (R_1 + R_2 + \dots + R_n) = I \cdot R_T \quad (4.4)$$

Dividindo os dois lados da equação 4.4 por  $I$ , chega-se a:

$$R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4.5)$$

Essa é a dedução da fórmula da associação em série de resistores apresentada na seção 2.7.1 (equação 2.12).

Calcula-se a potência nos vários componentes pela equação:

$$P_T = UI = (U_1 + U_2 + \dots + U_n) I$$

$$P_T = U_1 I + U_2 I + \dots + U_n I$$

$$P_T = P_{R1} + P_{R2} + \dots + P_{Rn} \quad (4.6)$$

em que:

- $P_T$  é a potência total consumida pelos resistores, ou a potência fornecida pela fonte aos resistores;
- $P_{R1}, P_{R2}, \dots, P_{Rn}$  são as potências consumidas nos resistores  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  respectivamente.

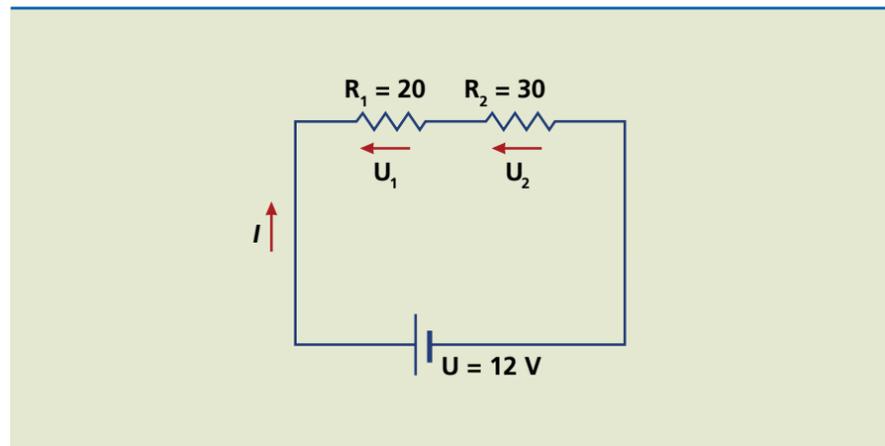


A potência total do circuito em série é a soma das potências consumidas pelas diversas resistências do circuito:  $P_T = U_1 I + U_2 I + \dots + U_n I$ . Além disso, é a potência fornecida pela fonte:  $P_T = UI$ .

### Exemplo

No circuito da figura 4.2, determine  $R_T$ ,  $I$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_T$ ,  $P_{R1}$ ,  $P_{R2}$ .

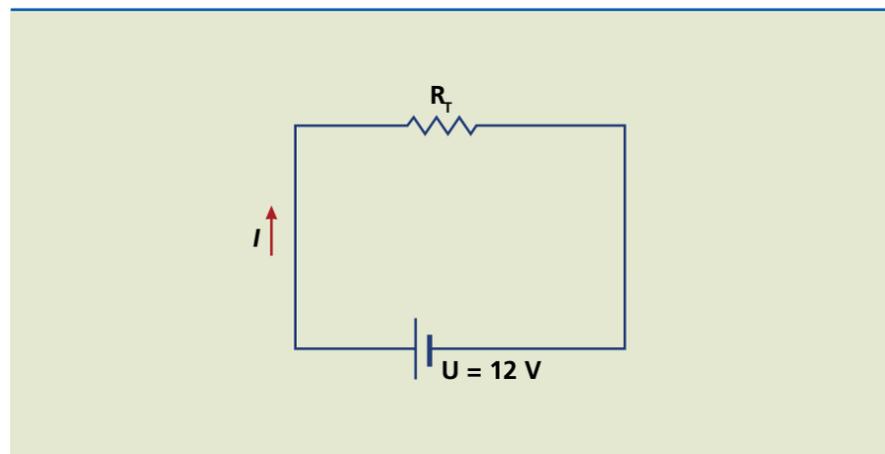
**Figura 4.2**  
Circuito em série.



*Solução:*

a) Determina-se o circuito equivalente (figura 4.3).

**Figura 4.3**  
Circuito equivalente.



$$\text{Obtêm-se } R_T = R_1 + R_2 = 50 \, \Omega \text{ e } I = \frac{U}{R_T} = \frac{12}{50} = 0,240 \, \text{A} = 240 \, \text{mA}.$$

b) Calculam-se as tensões nos resistores:

$$U_1 = R_1 \cdot I = 20 \cdot 0,24 = 4,80 \, \text{V}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = 30 \cdot 0,24 = 7,20 \, \text{V}$$

A tensão  $U_2$  também pode ser calculada aplicando a segunda lei de Kirchhoff, obtendo-se:

$$U_2 = U - U_1 = 12 - 4,8 = 7,20 \, \text{V}$$

c) Calculam-se as potências:

$$P_T = UI = 12 \cdot 0,24 = 2,88 \, \text{W}$$

$$P_{R1} = U_1 I = 4,8 \cdot 0,24 = 1,15 \, \text{W}$$

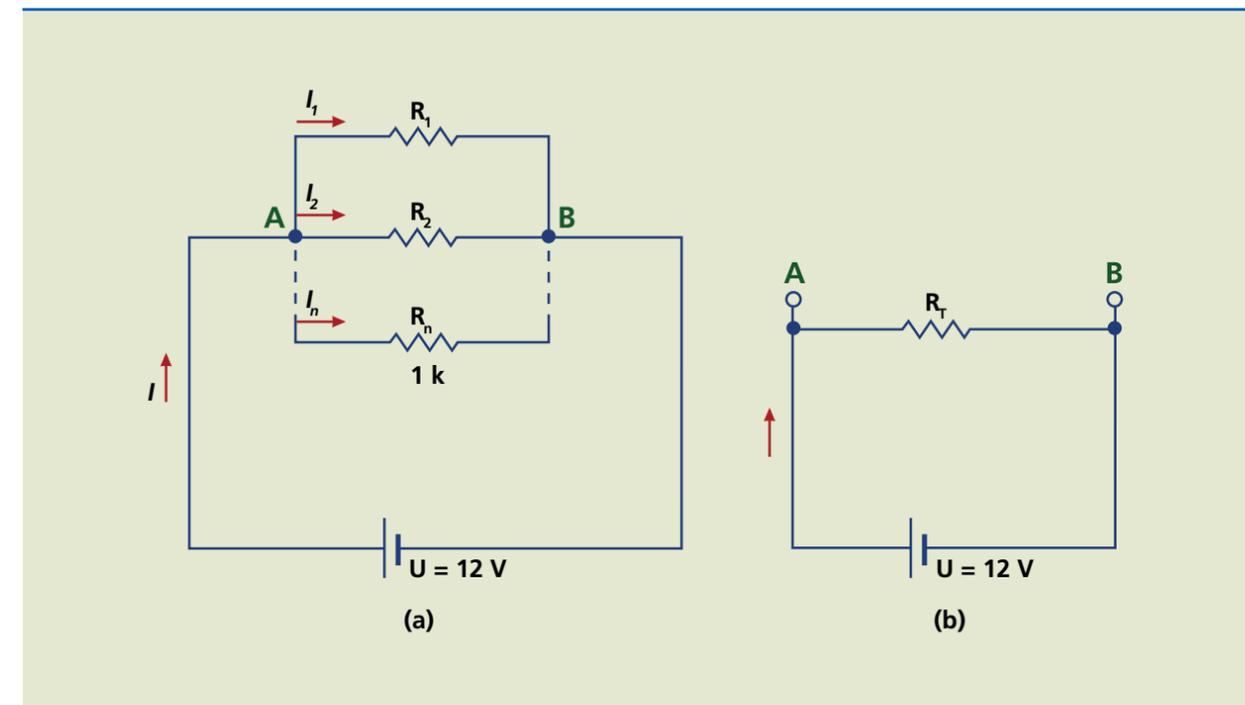
$$P_{R2} = U_2 I = 7,2 \cdot 0,24 = 1,73 \, \text{W}$$

## 4.2 Circuito em paralelo

A figura 4.4 ilustra uma associação em paralelo de  $n$  resistores conectados a uma fonte de tensão  $U$ .

**Figura 4.4**

(a) Circuito em paralelo e  
(b) circuito equivalente.



Todas as resistências estão ligadas aos pontos A e B, isto é, diretamente aos polos do gerador do circuito (figura 4.4a). Portanto, a tensão aplicada é a mesma para todas as resistências.

A corrente total  $I$  se divide pelos  $n$  resistores, ou seja, é a soma das correntes individuais nas resistências do circuito (primeira lei de Kirchhoff). Por isso, o circuito em paralelo é também denominado divisor de corrente.

A corrente em cada resistor pode ser calculada pela lei de Ohm:



$$\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_2 = \frac{U}{R_2} \\ I_3 = \frac{U}{R_3} \\ \vdots \\ I_n = \frac{U}{R_n} \end{cases} \quad (4.7)$$

Pela primeira lei de Kirchhoff, sabe-se que:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (4.8)$$

Substituindo as parcelas da equação 4.7 na equação 4.8, obtém-se:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = \frac{U}{R_T} \quad (4.9)$$

**Cálculo da resistência equivalente em circuito em paralelo**

Dividindo por U os dois últimos termos da equação 4.9, obtém-se:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (4.10)$$

Essa é a dedução da fórmula da resistência equivalente da associação em paralelo de resistores apresentada na seção 2.7.2 (equação 2.13).

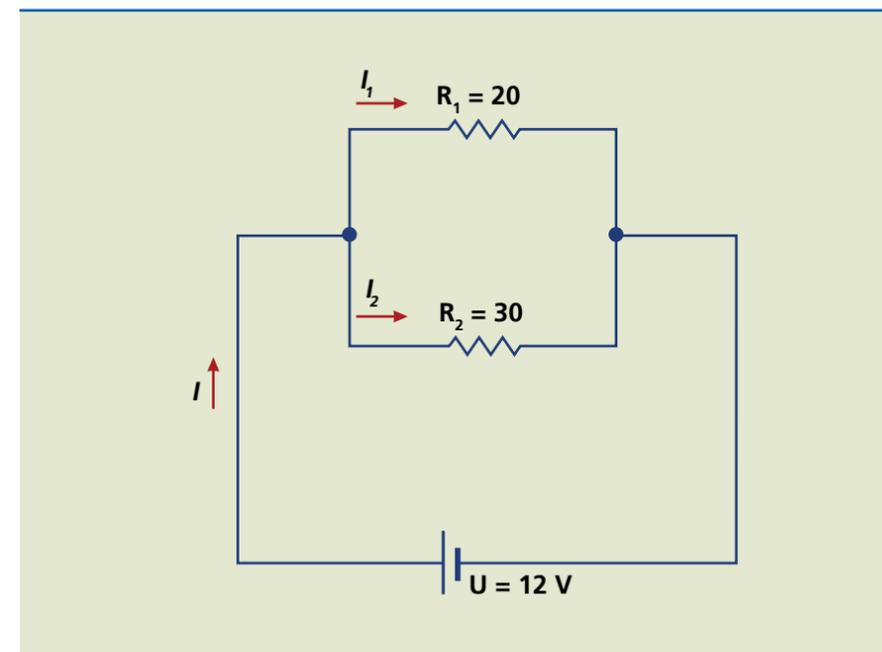
Calculando a potência nos vários componentes, tem-se:

$$\begin{aligned} P_T &= UI = U (I_1 + I_2 + \dots + I_n) \\ P_T &= UI_1 + UI_2 + \dots + UI_n \\ P_T &= P_{R1} + P_{R2} + \dots + P_{Rn} \quad (4.11) \end{aligned}$$

A potência total do circuito em paralelo é a soma das potências nas várias resistências do circuito. Também é igual à potência fornecida pela fonte.

**Exemplo**

No circuito da figura 4.5, determine  $R_T$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$ ,  $P_T$ ,  $P_{R1}$ ,  $P_{R2}$ .



**Figura 4.5**  
Circuito em paralelo.

*Solução:*

a) Obtêm-se  $I_1$ ,  $I_2$  pela lei de Ohm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} = \frac{12}{20} = 0,60 \text{ A} \\ I_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{12}{30} = 0,40 \text{ A} \end{aligned}$$

b) Calcula-se a corrente total pela primeira lei de Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2 = 0,6 + 0,4 = 1,00 \text{ A}$$

c) A resistência total é determinada pela lei de Ohm:

$$R_T = \frac{12}{1} = 12,0 \Omega$$

Pode-se também obter a resistência total calculando a resistência da associação em paralelo da figura 4.5:

$$R_T = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12,0 \Omega$$



O circuito em paralelo é amplamente utilizado em instalações elétricas, por garantir uma tensão praticamente constante quando se conectam novas cargas à rede (fonte).

d) Calculam-se as potências em cada componente:

$$P_T = UI = 12 \cdot 1 = 12,0 \text{ W}$$

$$P_{R1} = UI_1 = 12 \cdot 0,6 = 7,20 \text{ W}$$

$$P_{R2} = UI_2 = 12 \cdot 0,4 = 4,80 \text{ W}$$

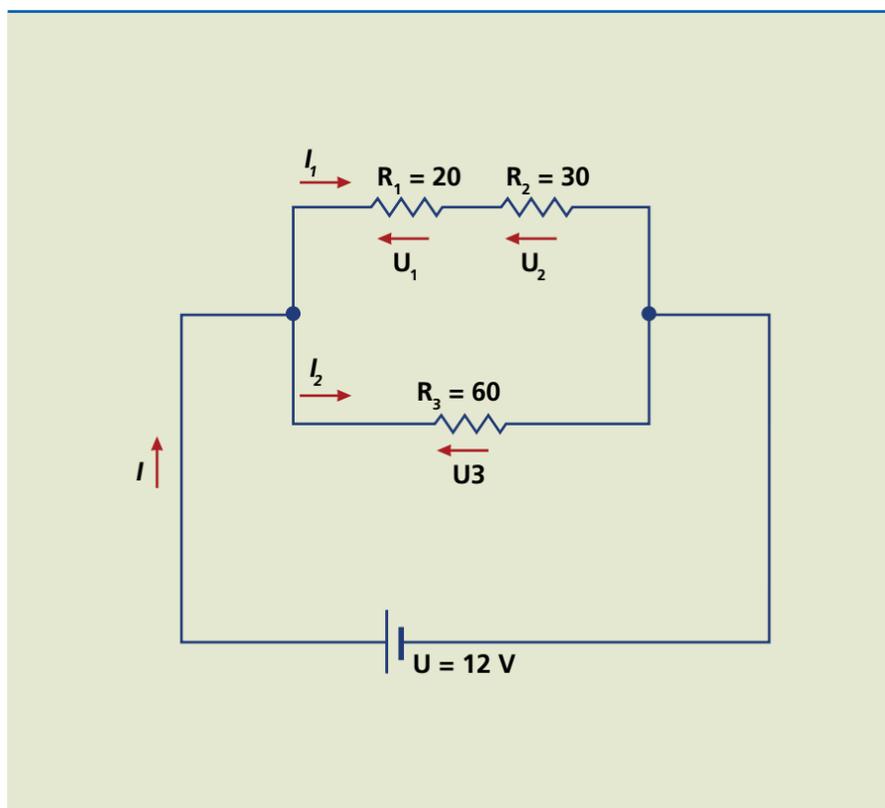
### 4.3 Circuito misto

O próprio nome já indica que esse circuito apresenta associações em série e em paralelo. Dependendo do trecho em estudo, lança-se mão da característica de cada uma delas.

#### Exemplo

Determine a resistência total, as tensões e as correntes indicadas no circuito da figura 4.6, bem como as potências em cada resistência e a potência total fornecida pelo gerador.

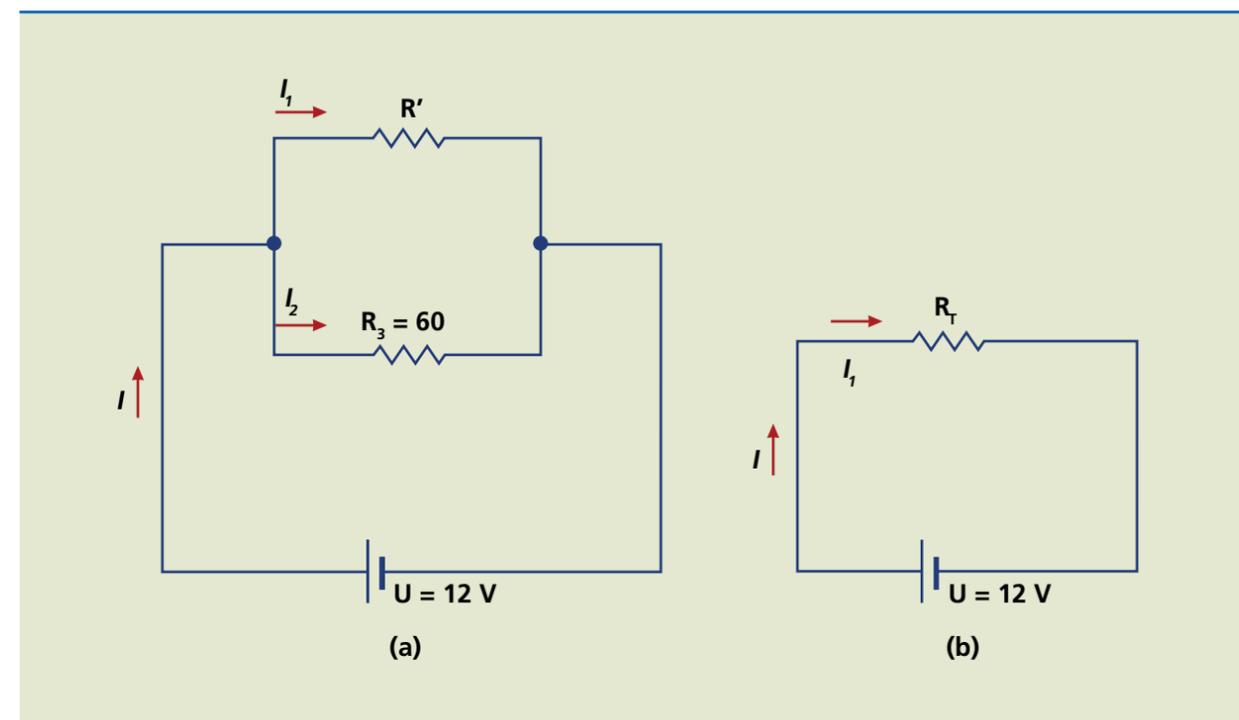
**Figura 4.6**  
Circuito misto.



*Solução:*

a) No ramo pelo qual passa a corrente I<sub>1</sub>, associam-se os dois resistores em série e calcula-se R' = 10 + 30 = 40,0 Ω.

b) Redesenhando o circuito da figura 4.6, obtém-se o da figura 4.7a



**Figura 4.7**  
(a) Simplificação do circuito da figura 4.6 e  
(b) circuito equivalente.

c) Associando em paralelo os resistores da figura 4.7a, obtém-se a figura 4.7b, com:

$$R_T = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24,0 \Omega$$

d) Pode-se calcular a corrente total (na fonte) pela lei de Ohm:

$$I = \frac{12}{24} = 0,50 \text{ A}$$

e) A potência total fornecida pela fonte (consumida pelos resistores) é obtida por:

$$P_T = UI = 12 \cdot 0,5 = 6,00 \text{ W}$$

f) As correntes I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> podem ser determinadas pela lei de Ohm:

$$I_1 = \frac{12}{40} = 0,30 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{12}{60} = 0,20 \text{ A}$$

Nota-se que I<sub>1</sub> + I<sub>2</sub> = 0,50 A, confirmando o resultado obtido no item d.



g) Utilizando a lei de Ohm, calculam-se as tensões no circuito:

$$U_1 = R_1 I_1 = 10 \cdot 0,3 = 3,00 \text{ V}$$

$$U_2 = R_2 I_1 = 30 \cdot 0,3 = 9,00 \text{ V}$$

$$U_3 = U = 12,0 \text{ V}$$

Como era de esperar:  $U_1 + U_2 = 12,0 \text{ V}$ .

h) Calculam-se as potências no circuito:

$$P_{R1} = U_1 I_1 = 3 \cdot 0,3 = 0,90 \text{ W}$$

$$P_{R2} = U_2 I_1 = 9 \cdot 0,3 = 2,70 \text{ W}$$

$$P_{R3} = U_3 I_2 = 12 \cdot 0,2 = 2,40 \text{ W}$$

Nesse caso, também se confirma que a soma das potências nos resistores é igual à potência fornecida pela fonte.

#### 4.4 Caso particular: curto-circuito

Esse processo acontece quando dois pontos de potenciais elétricos diferentes são interligados por uma resistência muito pequena (quase nula). Isso faz com que algumas correntes do circuito tenham sua intensidade aumentada. O exemplo a seguir ilustra um caso.

##### Exemplo

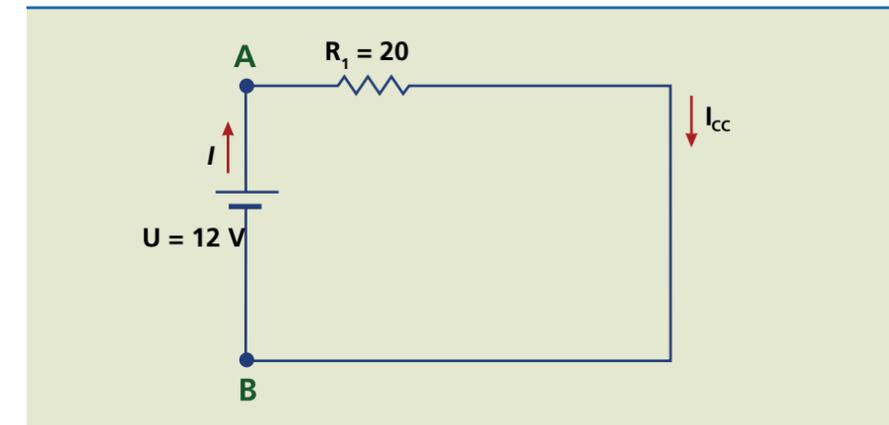
Determine as correntes  $I$ ,  $I_{cc}$ ,  $I_2$  para o circuito da figura 4.8. Esse circuito é semelhante ao da figura 4.2, mas com um curto-circuito em paralelo com o resistor de  $30 \Omega$ .

Solução:

a) Como o fio tem resistência praticamente nula, a tensão  $U_{XB}$  sobre ele é nula.

b) Sendo  $U_{XB} = 0$ , a corrente  $I_2$  no resistor  $R_2$  também é nula ( $I_2 = 0$ ). Pela primeira lei de Kirchhoff,  $I = I_{cc}$ .

c) Como  $U_{XB} = 0$ , o circuito da figura 4.8 pode ser redesenhado conforme mostrado na figura 4.9.



**Figura 4.9**  
Circuito da figura 4.8 simplificado.

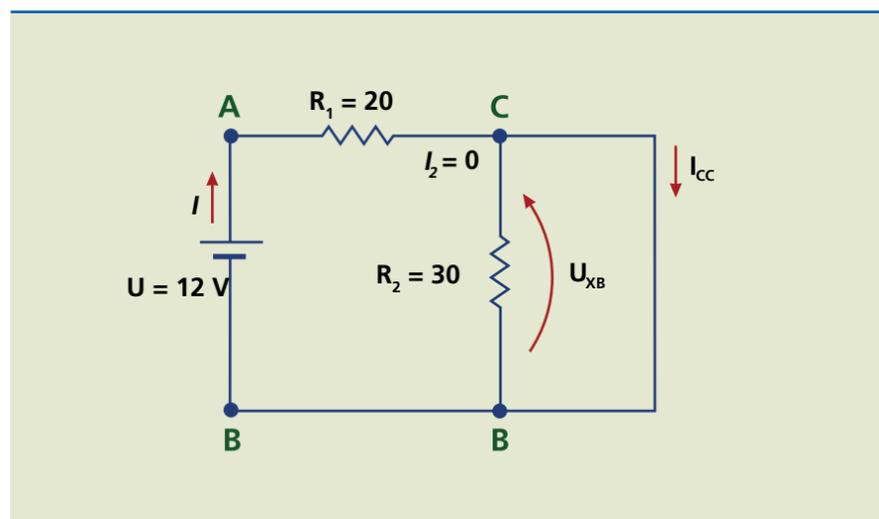
d) A corrente na fonte é calculada pela lei de Ohm:

$$I = I_{cc} = \frac{12}{20} = 0,60 \text{ A}$$

No circuito da figura 4.2, a corrente na fonte era de  $0,24 \text{ A}$ .

**Figura 4.8**

Circuito com resistência nula (curto-circuito).



# Capítulo 5

**Circuitos**  

---

**divisores**  

---

**de tensão**  

---

**e corrente**  

---

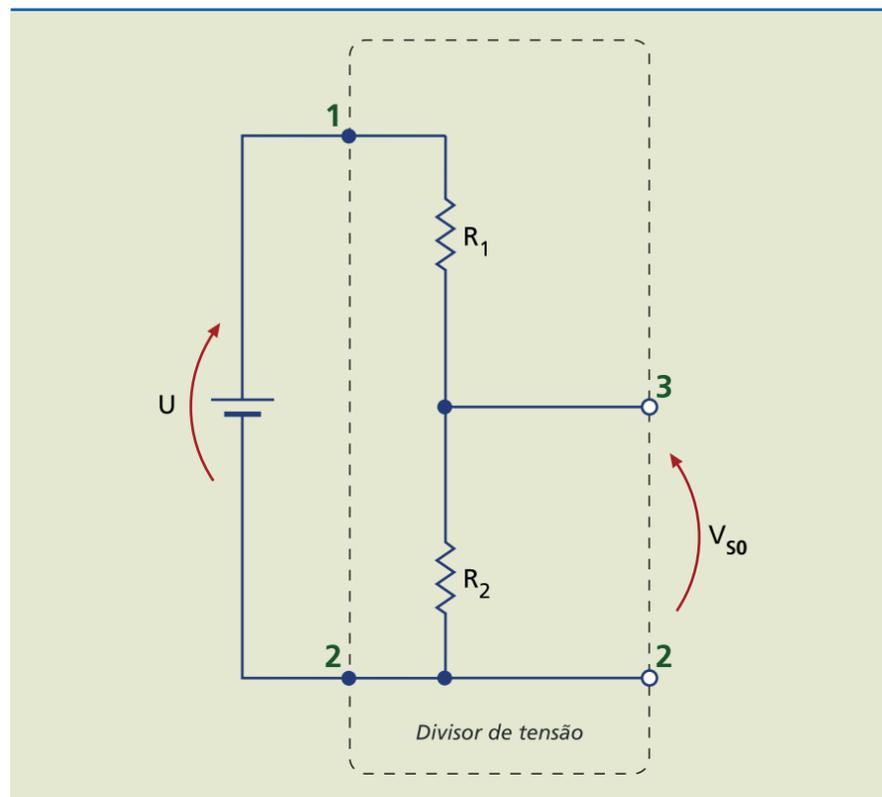


s circuitos divisores fornecem em sua saída uma tensão ou uma corrente com valor menor que o de entrada.

## 5.1 Divisores de tensão

A figura 5.1 ilustra o circuito divisor de tensão básico. A tensão de entrada  $U$  é aplicada nos terminais 1 e 2. A tensão de saída  $V_{S0}$  é obtida entre os terminais 3 e 2, sendo este último comum para a entrada e para a saída. Nesta seção, vamos estudar os circuitos divisores de tensão sem carga e com carga, cada tipo permitindo diferentes configurações. Em cada caso, a tensão de saída será representada por  $V_{S0}$  (sem carga) ou por  $V_S$  (com carga). A seguir, vamos calcular a tensão de saída tanto para o circuito da figura 5.1 como para variantes desse circuito empregadas na prática.

**Figura 5.1**  
Circuito básico de um divisor de tensão.



### 5.1.1 Divisor de tensão sem carga

Nessa situação, **nenhuma carga** (resistência) é conectada aos terminais 3 e 2 da saída. A divisão de tensão pode ser feita com tensão de saída constante ou variável.

A ligação de uma carga nesses pontos do circuito faz com que a tensão de saída fique menor do que o valor calculado (ver seção 5.1.2).

#### Divisor com tensão de saída constante

Retomando a figura 5.1, vamos calcular a tensão de saída  $V_{S0}$  em função da tensão de entrada  $U$  e das resistências  $R_1$  e  $R_2$ .

A resistência total da associação em série de  $R_1$  e  $R_2$  vale:

$$R_T = R_1 + R_2 \quad (5.1)$$

A corrente  $I$  que passa pelos resistores é obtida pela lei de Ohm:

$$I = \frac{U}{R_T} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (5.2)$$

Como a tensão de saída  $V_{S0}$  é a tensão sobre o resistor  $R_2$ , podemos obtê-la pela lei de Ohm e pela equação 5.2:

$$V_{S0} = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$V_{S0} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.3)$$

Essa é a equação da tensão de saída do circuito divisor de tensão em vazio (sem carga), que pode ser descrita da seguinte forma:

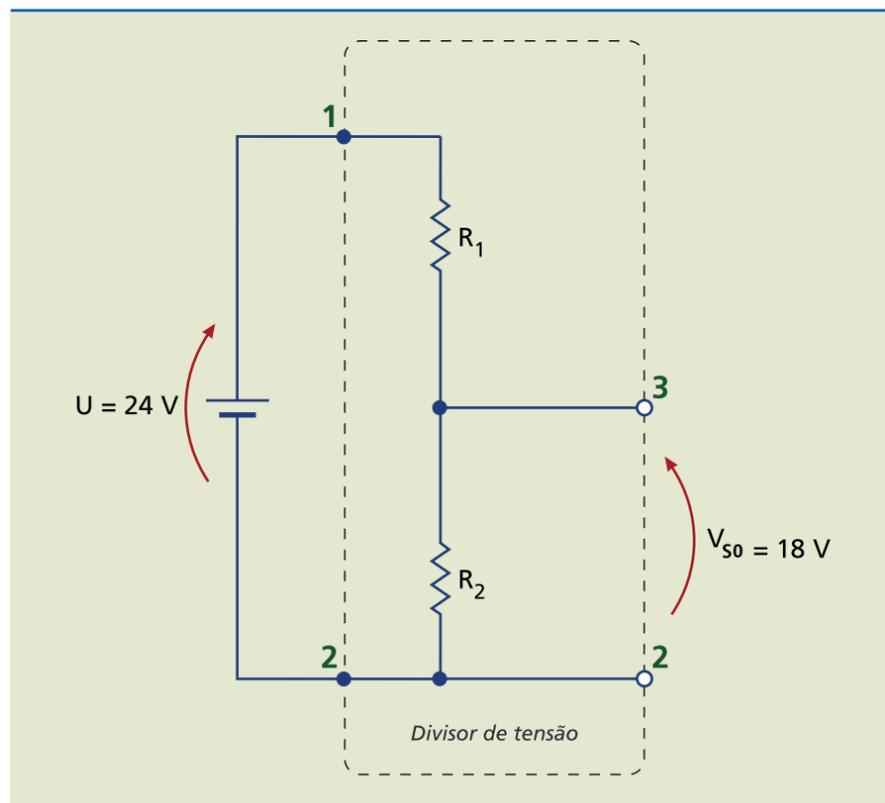
A tensão de saída ( $V_S$ ) é igual à tensão  $U$  da fonte (gerador) multiplicada pela razão entre a resistência  $R_2$  sobre a qual se mede  $V_S$  e a somatória das resistências do circuito  $R_1 + R_2$ .

#### Exemplo

Determine as resistências do circuito divisor de tensão de modo a obter a tensão de saída em vazio de 18 V, sabendo que a resistência total do circuito vista da fonte ( $R_1 + R_2$ ) é de 6 k $\Omega$  e a tensão de entrada é de 24 V (figura 5.2).



**Figura 5.2**  
Divisor de tensão.



*Solução:*

O enunciado diz que  $R_T = R_1 + R_2 = 6 \text{ k}\Omega$ .

Usando a equação 5.3, obtém-se:

$$V_{so} = 18 = 24 \frac{R_2}{6},$$

resultando em  $R_2 = 4,50 \text{ k}\Omega$  e  $R_1 = R_T - R_2 = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ k}\Omega$ .

**Divisor com tensão de saída variável**

As duas estratégias a seguir permitem a obtenção de tensões variáveis na saída. A primeira delas provê tensão continuamente variável entre 0 (zero) e  $U$ . A segunda fornece apenas um número finito de valores predefinidos.

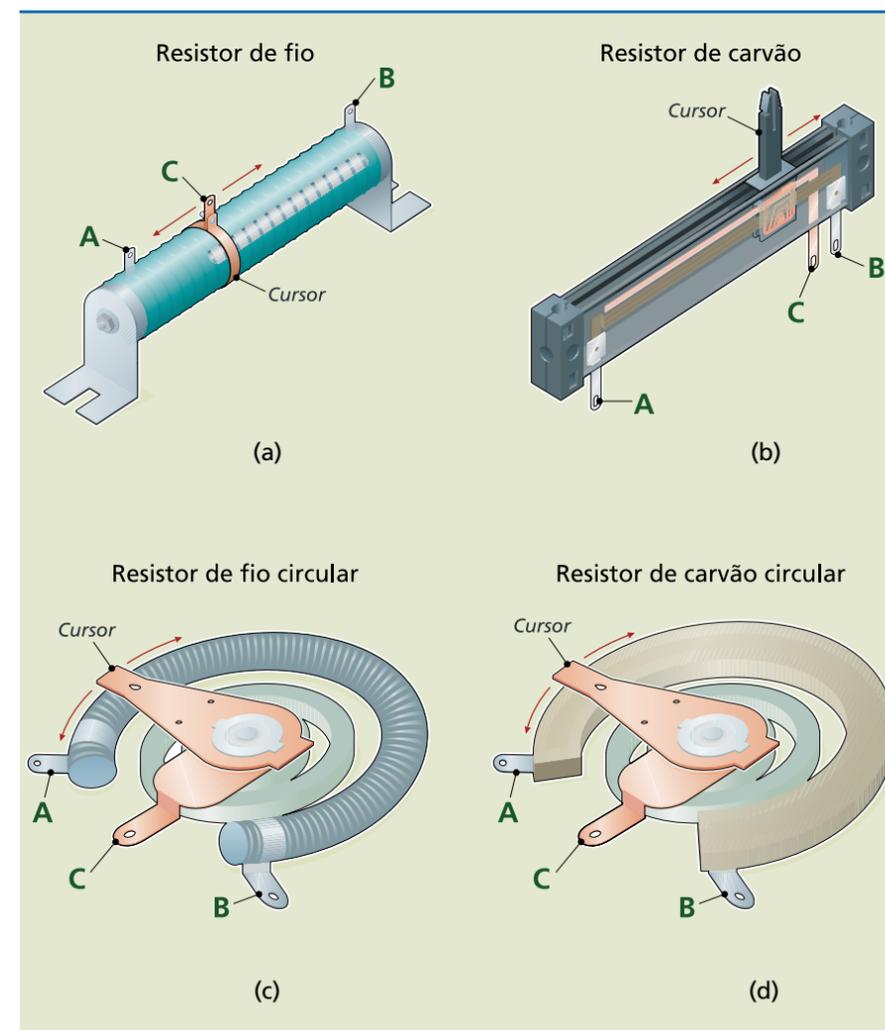
**Divisor com resistência variável**

Resistores variáveis têm tipicamente três terminais. Dois deles (A e B) são fixos e conectados às extremidades do resistor. Resistores desse tipo são feitos de carbono ou fio metálico. Seu formato pode ser linear (figuras 5.3a e 5.3b) ou circular (figuras 5.3c e 5.3d). Um cursor, que desliza sobre o elemento resistivo, é conectado ao terminal C.

O potenciômetro é um dispositivo de resistência variável utilizado em circuitos eletrônicos, no qual a posição do cursor pode ser alterada. Construtivamente, é semelhante ao mostrado na figura 5.3c. O resistor que o constitui também pode ser feito de fio.

O *trimpot* (figura 2.5) é um resistor variável cuja resistência é alterada por um pequeno parafuso. É empregado apenas para ajustes do equipamento, permanecendo travado durante sua operação. Sua estrutura é semelhante à dos resistores da figura 5.3.

Para aplicações de elevada potência, empregam-se os reostatos, construtivamente semelhantes ao resistor da figura 5.3a.



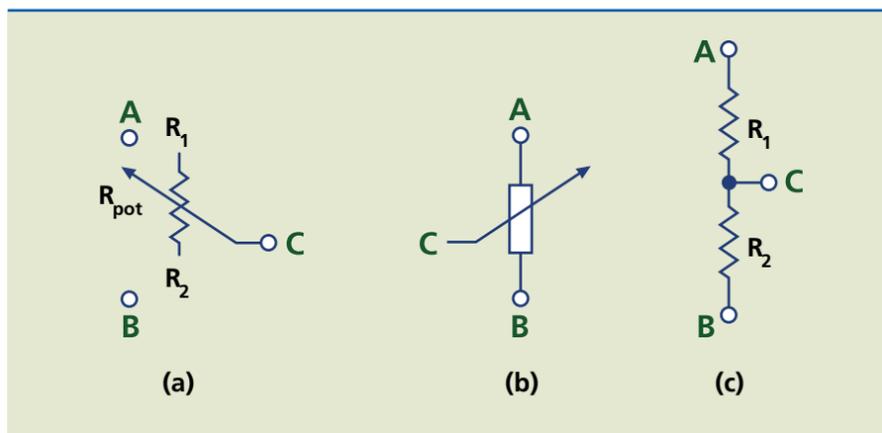
**Figura 5.3**  
Detalhes construtivos de resistores variáveis. A resistência entre os terminais B e C varia de zero a  $R_T = R_{pot}$  ao mudar a posição do cursor C do terminal B para o A, enquanto a resistência entre os terminais A e C varia de  $R_{pot}$  a zero.  $R_{pot}$  é o valor nominal do resistor variável.

A figura 5.4 ilustra duas representações gráficas para resistores variáveis de três terminais (figuras 5.4a e 5.4b) e um modelo simples (figuras 5.4c) de duas resistências  $R_1$  e  $R_2$ , que será utilizado para o cálculo das tensões e correntes no circuito.  $R_1$  representa a resistência entre os terminais A e C;  $R_2$ , a resistência entre os terminais C e B.



**Figura 5.4**

Representação gráfica para potenciômetros e trimpots.



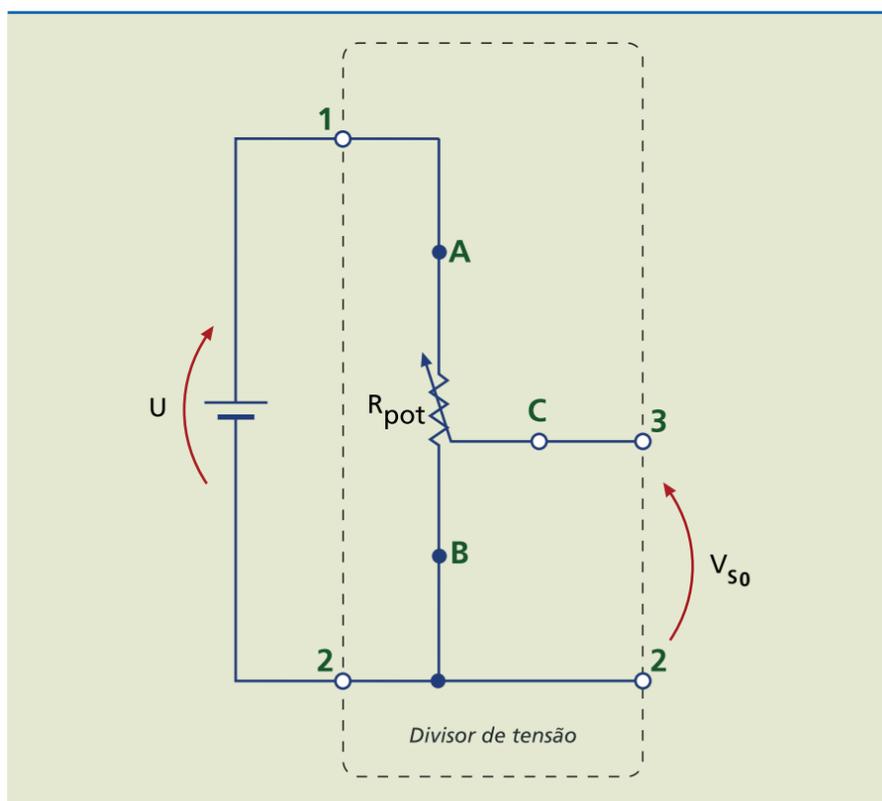
Os circuitos analisados a seguir apresentam resistores variáveis.

**Caso a:** tensão variável entre 0 e U ( $0 \leq V_{S0} \leq U$ )

Para obter tensões entre 0 e U, emprega-se apenas um potenciômetro ligado aos terminais da fonte do circuito, conforme ilustrado na figura 5.5.

**Figura 5.5**

Divisor de tensão variável: caso a.



Substituindo o resistor variável da figura 5.5 pelo modelo equivalente da figura 5.4c, obtém-se circuito idêntico ao da figura 5.1. Utilizando a equação 5.3, analisam-se três casos distintos:

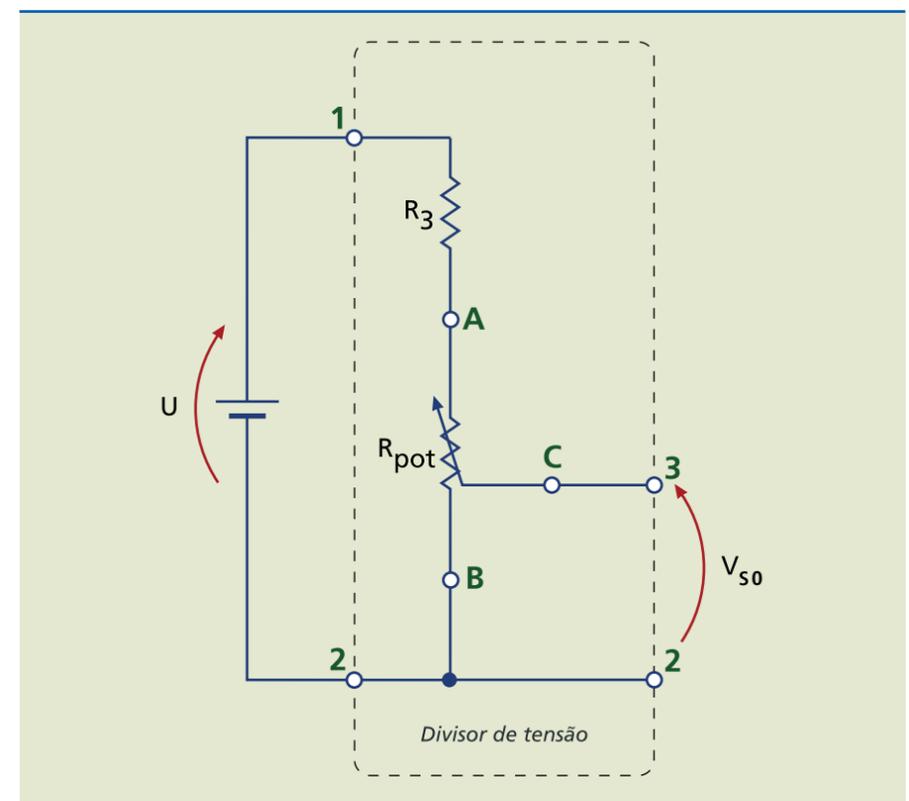
- Cursor C no ponto B,  $R_2 = 0$  e  $V_{S0} = 0$ .
- Cursor C no ponto A,  $R_2 = R_{pot}$  e  $V_{S0} = U$ .
- Cursor C em um ponto intermediário qualquer,  $R_2 = kR_{pot}$  ( $k = 0$  para o cursor no ponto A e  $k = 1$  para C no ponto B; para outras posições,  $0 < k < 1$ ); obtém-se:

$$V_{S0} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{kR_{pot}}{R_{pot}} = kU \quad (0 \leq k \leq 1) \quad (5.4)$$

A tensão de saída assume valores entre 0 e U.

**Caso b:** tensão variável com limite superior ou inferior

Em certas situações, é necessário limitar os valores da tensão. Quando se pretende limitar o **valor máximo** da tensão de saída  $V_S$ , emprega-se um circuito como o da figura 5.6.



Assim, a ligação de um resistor  $R_3$  no circuito permite impor um limite superior à tensão de saída:  $0 \leq V_{S0} < V_{SUP}$ .

Conforme a posição do cursor, é possível ressaltar três casos distintos, aplicando a equação 5.3:

**Figura 5.6**

Divisor de tensão com limitação superior no valor  $V_{SUP}$  ( $0 \leq V_{S0} \leq V_{SUP}$ ). O resistor  $R_3$  impede que a tensão ultrapasse  $V_{SUP}$ .



- Cursor C no ponto B,  $R_2 = 0$  e  $V_{S0} = 0$ .
- Cursor C no ponto A,  $R_2 = R_{pot}$ ; determina-se o valor  $V_{SUP}$ :

$$V_{S0} = V_{SUP} = U \frac{R_{pot}}{R_{pot} + R_3} \quad (5.5)$$

- Cursor C em um ponto intermediário qualquer,  $R_2 = kR_{pot}$ , em que  $k$  é um número entre 0 e 1; obtém-se:

$$V_{S0} = U \frac{kR_{pot}}{R_{pot} + R_3} \rightarrow 0 \leq V_{S0} \leq V_{SUP} \quad (5.6)$$

A tensão de saída assume qualquer valor entre 0 e  $V_{SUP}$ .

Para limitar o **valor mínimo** de  $V_{S0}$ , emprega-se o circuito da figura 5.7.

- Cursor C no ponto B,  $R_2 = 0$ ;  $V_{S0}$  assume o valor  $V_{INF}$ :

$$V_{S0} = V_{INF} = U \frac{R_4}{R_{pot} + R_4} \quad (5.7)$$

- Cursor C no ponto A,  $R_2 = R_{pot}$ ; obtém-se  $V_{S0} = U$ .
- Cursor C em um ponto intermediário qualquer,  $R_2 = kR_{pot}$ ; chega-se a:

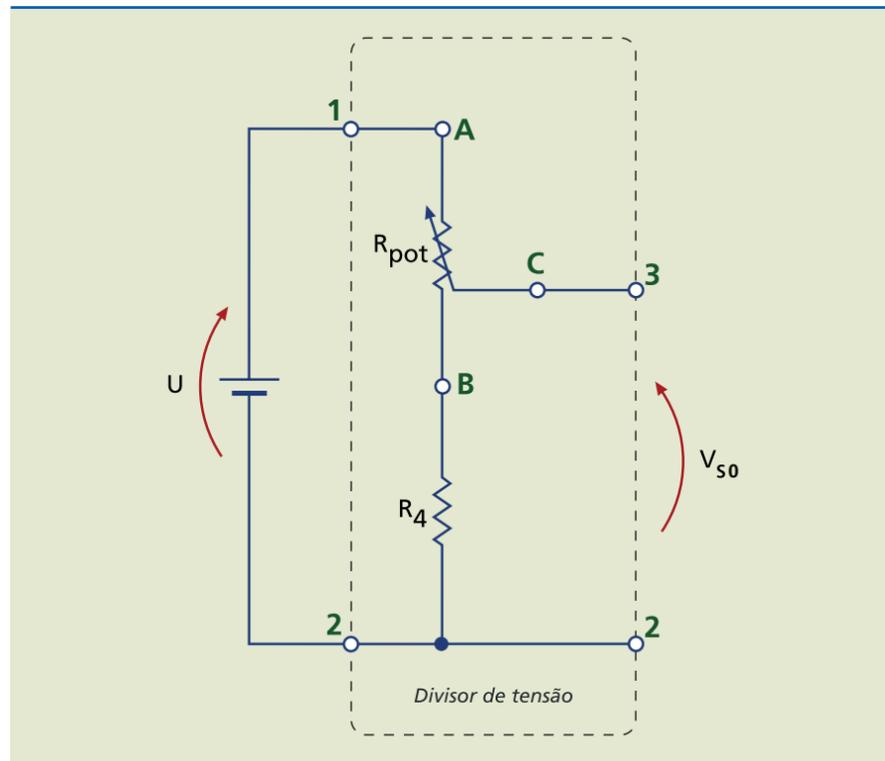
$$V_{S0} = U \frac{kR_{pot} + R_4}{R_{pot} + R_4} \rightarrow V_{INF} \leq V_{S0} \leq U \quad (5.8)$$

A tensão de saída assume qualquer valor entre  $V_{INF}$  e  $U$ .

No caso de limite duplo (figura 5.8), isto é, **limites inferior**  $V_{INF}$  e **superior**  $V_{SUP}$  à tensão de saída:  $V_{INF} \leq V_{S0} < V_{SUP}$ .

**Figura 5.7**

Divisor de tensão com limitação inferior no valor  $V_{INF}$  ( $V_{INF} \leq V_{S0} < U$ ).



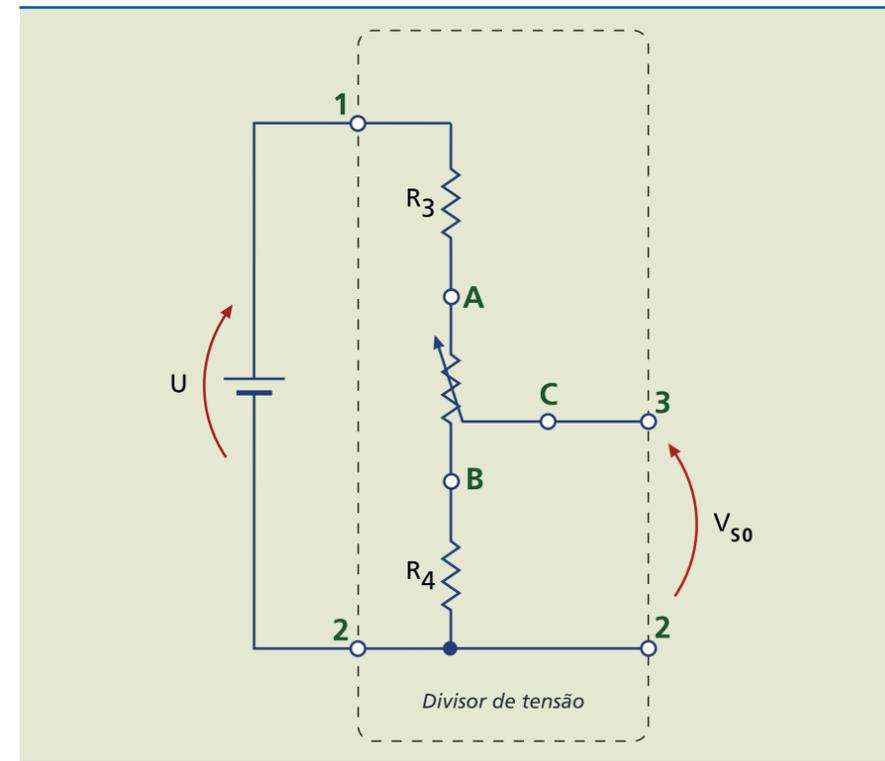
É possível, assim, impor um limite inferior à tensão de saída:  $V_{INF} \leq V_{S0} < U$ .

Na figura 5.7, a tensão de saída varia de  $V_{INF}$  a  $U$ . O resistor  $R_4$  impede que a tensão mínima de saída chegue a 0, limitando-a em  $V_{INF}$ .

Utilizando a equação 5.3, analisam-se três casos distintos:

**Figura 5.8**

Divisor de tensão com limites inferior e superior na tensão de saída ( $V_{INF} \leq V_{S0} < V_{SUP}$ ).



Aplicando a equação 5.3, observam-se três casos distintos:

- Cursor C no ponto B,  $R_2 = 0$ ;  $V_{S0}$  assume o valor  $V_{INF}$ :

$$V_{S0} = V_{INF} = U \frac{R_4}{R_{pot} + R_4 + R_3} \quad (5.9)$$



- Cursor C no ponto A,  $R_2 = R_{pot}$ ;  $V_{S0}$  assume o valor  $V_{SUP}$ :

$$V_{S0} = V_{SUP} = U \frac{R_{pot} + R_4}{R_{pot} + R_3 + R_4} \quad (5.10)$$

- Cursor C em um ponto intermediário qualquer,  $R_2 = kR_{pot}$ ; obtém-se:

$$V_{S0} = U \frac{kR_{pot} + R_4}{R_{pot} + R_3 + R_4} \rightarrow V_{INF} \leq V_{S0} \leq V_{SUP} \quad (5.11)$$

A tensão de saída assume qualquer valor entre  $V_{INF}$  e  $V_{SUP}$ .

**Exemplo**

Dada uma fonte de 120 V com potência máxima de 240 mW, projete um circuito divisor de tensão sem carga que forneça tensões de saída na faixa  $60 \text{ V} \leq V_{S0} \leq 100 \text{ V}$ , utilizando o circuito da figura 5.8.

*Solução:*

Como a potência fornecida pela fonte é limitada, calcula-se o mínimo valor possível para  $R_T = R_3 + R_4 + R_{pot}$ :

$$P_{\text{fonte}} = 240 \text{ mW} = \frac{U^2}{R_T} = \frac{120^2}{R_T}$$

Daí obtém-se  $R_T = 60 \text{ k}\Omega$ .

Aplica-se a equação 5.9:

$$V_{S0} = V_{INF} = 60 = U \frac{R_4}{R_{pot} + R_4 + R_3} = 120 \frac{R_4}{60 \text{ k}\Omega},$$

resultando em  $R_4 = 30,0 \text{ k}\Omega$ .

Utiliza-se a equação 5.10:

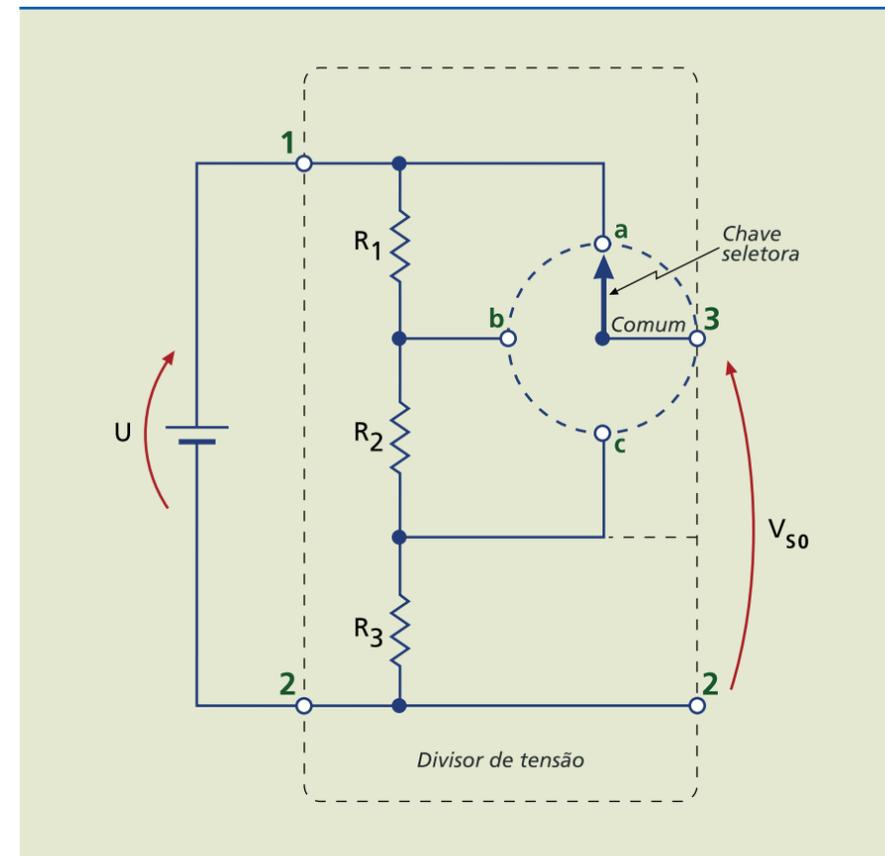
$$V_{S0} = V_{SUP} = 100 \text{ V} = U \frac{R_{pot} + R_4}{R_{pot} + R_3 + R_4} = 120 \frac{R_{pot} + 30 \text{ k}\Omega}{60 \text{ k}\Omega},$$

obtendo  $R_{pot} = 20,0 \text{ k}\Omega$ .

Como  $R_T = 60 \text{ k}\Omega = R_3 + R_4 + R_{pot} = R_3 + 30 \text{ k}\Omega + 20 \text{ k}\Omega$ , então  $R_3 = 10,0 \text{ k}\Omega$ .

**Divisor com seletor de tensão**

A tensão de saída assume valores predefinidos sem passar por valores intermediários. Em lugar do resistor variável, usa-se uma chave seletora com resistores fixos para que se obtenham os valores desejados (figura 5.9).



**Figura 5.9**  
Divisor de tensão com chave seletora.

Assim:

- Chave na posição *a*:

$$V_{S0} = U$$

- Chave na posição *b*:

$$V_{S0} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5.12)$$

- Chave na posição *c*:

$$V_{S0} = U \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5.13)$$



**Exemplo**

Determine as tensões de saída do circuito da figura 5.9, com  $R_1 = 2k2 \Omega$ ,  $R_2 = 3k3 \Omega$ ,  $R_3 = 1k5 \Omega$  e  $U = 14 V$ .

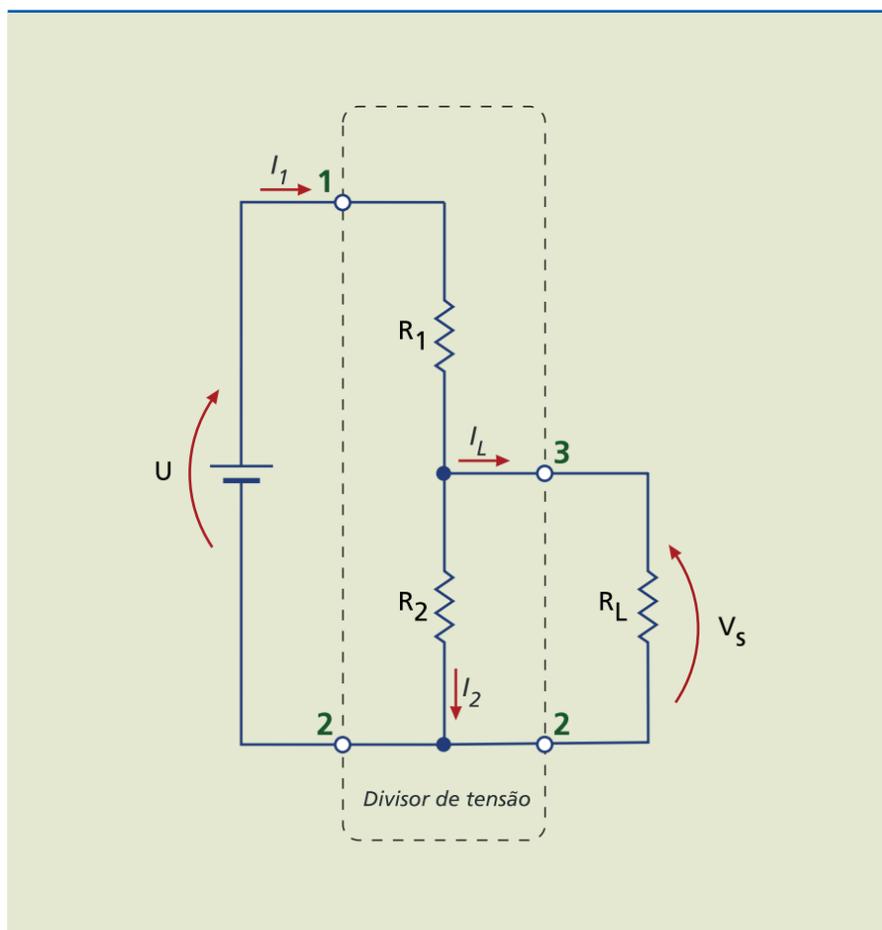
*Solução:*

- Na posição *a*:  $V_{S0} = 14 V$ .
- Na posição *b*:  $V_{S0} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 14 \frac{3300 + 1500}{2200 + 3300 + 1500} = 9,60 V$
- Na posição *c*:  $V_{S0} = U \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 14 \frac{1500}{2200 + 3300 + 1500} = 3,00 V$

**5.1.2 Divisor de tensão com carga**

Consiste em acrescentar à saída de um dos circuitos anteriores uma carga denominada  $R_L$  (figura 5.10). A tensão de saída com carga  $V_S$  é menor que os valores  $V_{S0}$  anteriormente calculados sem a inserção de carga.

**Figura 5.10**  
Divisor de tensão com carga conectada à saída.

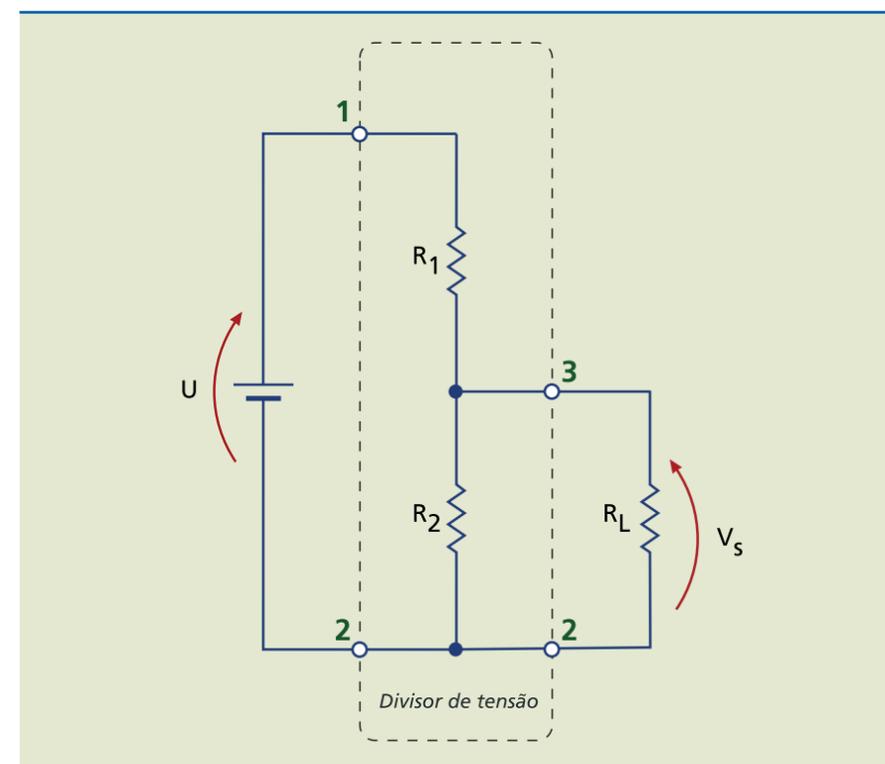


O que acontece nessa situação:

- Ao inserir  $R_L$  nos terminais de saída, a corrente  $I_1$  através do resistor  $R_1$  sofre acréscimo, passando a ser  $I_1 = I_2 + I_L$ . Aumento na corrente significa queda de tensão maior no resistor  $R_1$ , causando decréscimo em  $V_S$ .
- Nota-se na figura 5.10 que  $R_L$  está em paralelo com  $R_2$ , reduzindo o valor da resistência equivalente entre os terminais 3 e 2. Pela equação 5.3, verifica-se que a tensão de saída sofre decréscimo.

**Cálculo de  $V_S$**

Associando  $R_L$  em paralelo com  $R_2$ , obtém-se o resistor equivalente  $R_2'$ . O circuito da figura 5.10 pode ser, então, redesenhado, conforme a figura 5.11.



**Figura 5.11**  
Circuito simplificado do divisor de tensão com carga conectada à saída.

Tem-se um novo divisor de tensão com resistor superior de valor  $R_1$  e resistor inferior de valor  $R_2'$ , dado por:

$$R_2' = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \quad (5.14)$$

A resistência total vista entre os terminais 1 e 2 vale:

$$R_T = R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \quad (5.15)$$



A tensão de saída  $V_S$  pode ser facilmente calculada pela fórmula do divisor de tensão sem carga (equação 5.3), obtendo-se:

$$V_S = U \frac{\frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}}$$

$$V_S = U \frac{R_2 R_L}{R_1 R_2 + R_1 R_L + R_2 R_L} \quad (5.16)$$

**Curiosidade**

Se o numerador e o denominador da equação 5.16 forem divididos por  $R_L$ , obtém-se:

$$V_S = U \frac{(R_2 R_L) \div R_L}{(R_1 R_2 + R_1 R_L + R_2 R_L) \div R_L} = U \frac{R_2}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_L}\right) + R_1 + R_2} \quad (5.17)$$

Se  $R_L$  for muito maior que  $R_1$  e  $R_2$ , o termo  $\left(\frac{R_1 R_2}{R_L}\right)$  torna-se muito

pequeno, valendo a relação:

$$V_S \approx U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.18)$$

Essa é a equação do divisor de tensão sem carga.

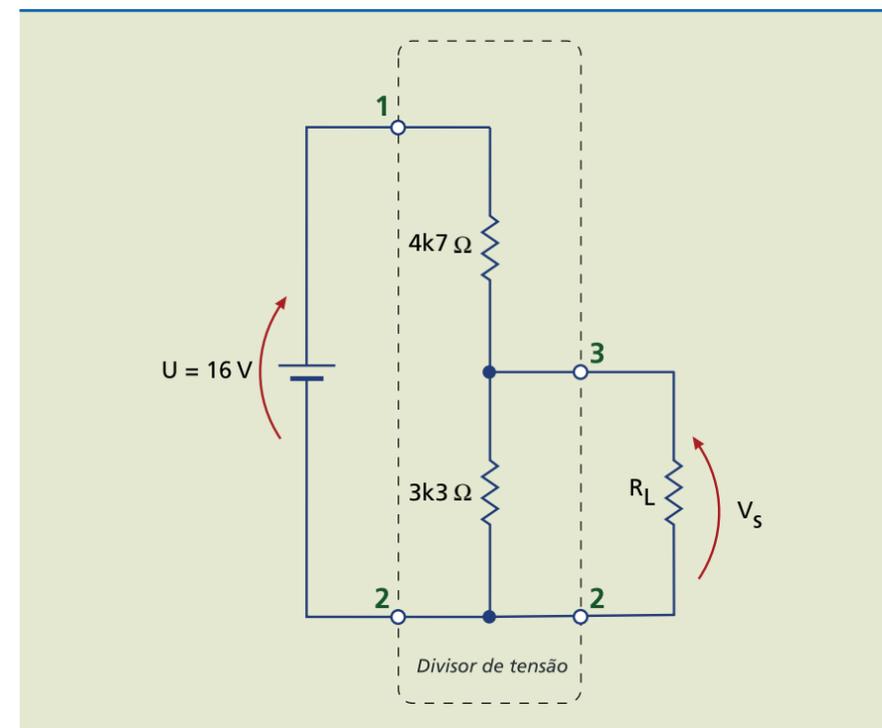
Como tal equação é aproximada, convém saber quanto  $R_L$  deve ser maior que  $R_1$  e  $R_2$  para que o erro não seja muito grande. Por exemplo, se a resistência da carga for dez vezes maior que o valor de  $R_1$  e de  $R_2$ , o erro resultante ao usar a equação 5.18 será menor que 10%. Isso pode ser comprovado no próximo exemplo, em que se calcula a tensão de saída  $V_S$  para diferentes valores de  $R_L$ .

**Exemplo**

Determine a tensão de saída  $V_S$  no circuito da figura 5.12 para os seguintes valores de  $R_L$ :

- $R_L = 3k3 \Omega$
- $R_L = 30 k\Omega$

- $R_L = 100 k\Omega$
- $R_L = \infty$  (divisor de tensão sem carga)



**Figura 5.12**  
Divisor de tensão com carga.

Solução:

Para  $R_L = 3k3 \Omega$ :

$$V_S = 16 \frac{3k3 \cdot 3k3}{4k7 \cdot 3k3 + 4k7 \cdot 3k3 + 3k3 \cdot 3k3} = 4,16 \text{ V}$$

Para  $R_L = 30 k\Omega$ :

$$V_S = 16 \frac{3k3 \cdot 30k}{4k7 \cdot 3k3 + 4k7 \cdot 30k + 3k3 \cdot 30k} = 6,20 \text{ V}$$

Para  $R_L = 100 k\Omega$ :

$$V_S = 16 \frac{3k3 \cdot 100k}{4k7 \cdot 3k3 + 4k7 \cdot 100k + 3k3 \cdot 100k} = 6,47 \text{ V}$$

Para  $R_L = \infty$  (divisor de tensão sem carga):

$$V_S = 16 \frac{3k3}{4k7 + 3k3} = 6,60 \text{ V}$$



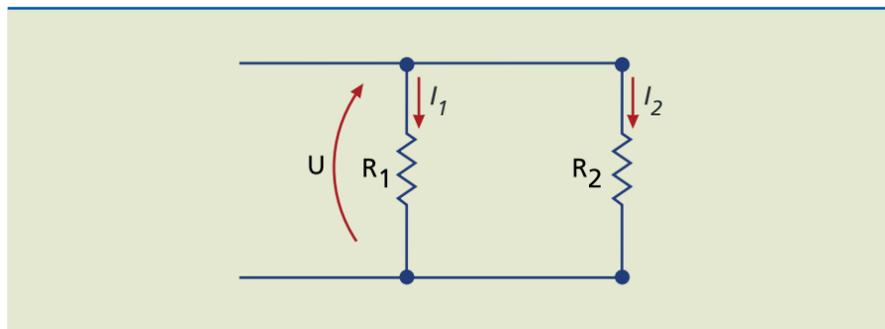
Nota-se que, quanto maior o valor de  $R_L$ , menor sua influência na tensão de saída. Além disso, o valor da tensão de saída com carga se aproxima do valor sem carga.

No caso de  $R_L = 30 \text{ k}\Omega$ , que é cerca de dez vezes os valores de  $R_1$  e  $R_2$ , a equação do divisor sem carga introduz um erro da ordem de 6% em relação à do divisor com carga. Aumentando o valor de  $R_L$ , esse erro torna-se desprezível.

### 5.2 Circuito divisor de corrente

Vamos analisar aqui apenas a situação do divisor de corrente fixo. Calculam-se a seguir as correntes  $I_1$  e  $I_2$  em função da corrente total  $I$  e das resistências  $R_1$  e  $R_2$ , mostradas na figura 5.13.

**Figura 5.13**  
Divisor de corrente.



Aplicando a lei de Ohm, obtêm-se as correntes  $I_1$  e  $I_2$  sobre os resistores  $R_1$  e  $R_2$ . Como estão associados em paralelo, eles ficam submetidos à mesma tensão  $U$ .

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_2 = \frac{U}{R_2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Pela primeira lei de Kirchhoff, calcula-se a corrente total  $I$ :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_{eq}} \quad (5.20)$$

$R_{eq}$  é a resistência equivalente da associação em paralelo de  $R_1$  e  $R_2$ , calculada por:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.21)$$

Da equação 5.20, obtém-se:

$$U = R_{eq} I \quad (5.22)$$

Substituindo a equação 5.22 em 5.19:

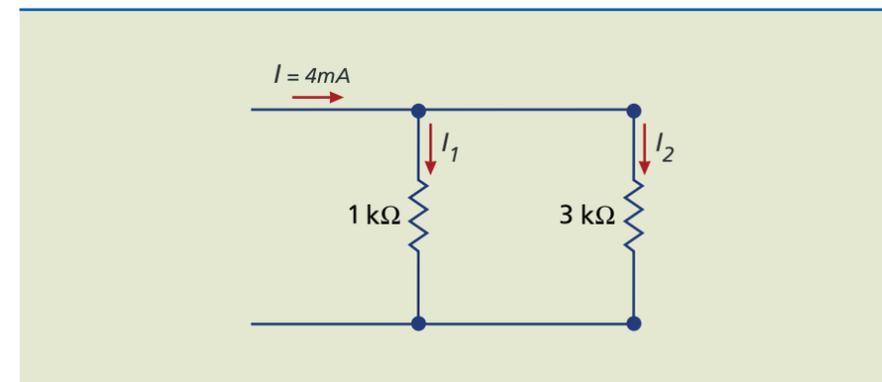
$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_{eq} I}{R_1} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \frac{R_{eq} I}{R_2} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{cases} \quad (5.23)$$

#### Conclusão

Uma vez conhecida a corrente total do gerador no circuito em paralelo, a corrente em cada resistência é o produto da corrente total pela razão entre a resistência do outro ramo e a soma das resistências do circuito em paralelo.

#### Exemplo

Determine as correntes  $I_1$  e  $I_2$  do circuito da figura 5.14.



**Figura 5.14**  
Divisor de corrente.

*Solução:*

As correntes  $I_1$  e  $I_2$  são calculadas por:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{3 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} 4 \text{ mA} = 3,00 \text{ mA} \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} 4 \text{ mA} = 1,00 \text{ mA} \end{cases}$$



### 5.3 Aplicações de divisores de tensão e corrente

Os circuitos divisores de tensão são largamente empregados em circuitos eletroeletrônicos quando se deseja obter tensões menores do que a disponível. Alguns exemplos incluem:

- os voltímetros, que permitem que um instrumento de baixa tensão possa medir tensões de elevada amplitude;
- a obtenção de tensão de alimentação mais baixa por meio de uma fonte de tensão elevada. Esse é o princípio dos reguladores lineares, amplamente utilizados em fontes de circuitos eletrônicos;
- o controle de volume de um rádio, permitindo que se varie a amplitude do sinal de saída de zero até o valor máximo.

Um exemplo de aplicação de divisor de corrente é o amperímetro, no qual se associa um galvanômetro (instrumento capaz de medir pequenas correntes) a um divisor de corrente, a fim de realizar a medida de elevadas amplitudes de corrente.

# Capítulo 6

## Leis de Kirchhoff



O físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) gravou seu nome no estudo da eletricidade. Em 1845, com apenas 21 anos, depois de empregar a lei de Ohm em condutores elétricos em rede, criou regras que definem a intensidade da corrente e o potencial elétrico em pontos da rede. Trabalhou em pesquisas sobre espectroscopia e estudou a radiação do corpo negro.

Juntamente com a lei de Ohm, as leis de **Kirchhoff** constituem as bases para a análise de um circuito elétrico. Analisar um circuito elétrico significa calcular as correntes, tensões e potências em seus componentes.

### 6.1 Definições

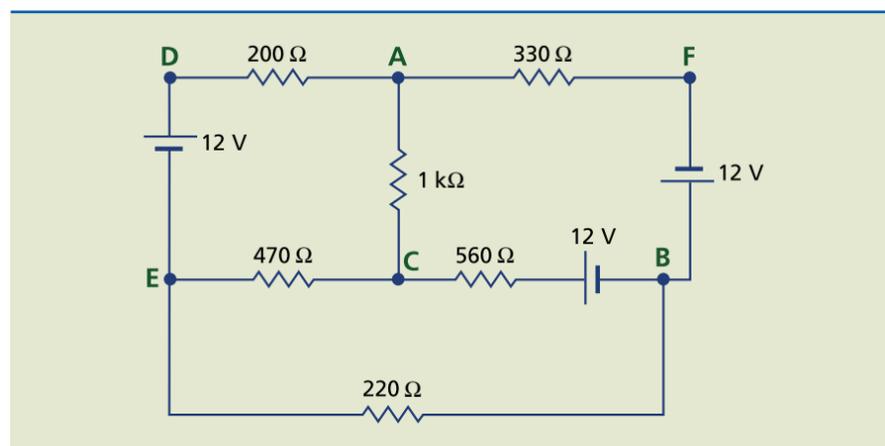
Antes da apresentação das leis de Kirchhoff, convém conhecer alguns termos que serão empregados ao longo do curso.

- **Nó elétrico:** ponto de ligação de três ou mais condutores do circuito.
- **Nó secundário:** nó que interliga dois fios.
- **Ramo:** trecho do circuito compreendido entre dois nós principais consecutivos. Em cada ramo do circuito flui uma corrente, denominada corrente de ramo.
- **Malha:** contorno fechado do circuito constituído de, pelo menos, dois ramos.
- **Rede elétrica** ou **circuito elétrico:** em resumo, associação de vários dispositivos elétricos, sejam eles ativos ou passivos.

#### Exemplo

Determine os nós, ramos e malhas do circuito da figura 6.1.

**Figura 6.1**  
Circuito elétrico.



*Solução:*

Os nós são os pontos A, B, C e E, pois interligam três ou mais fios (ramos). Os nós secundários (normalmente não considerados nas análises) são os pontos D e F. Os ramos são os trechos ADE, AC, AFB, CE, CB e BE. As malhas são os trechos ACEDA, ACBFA, CBEC, ADECBFA, AFBEDA, ADEBCA e AFBECA.

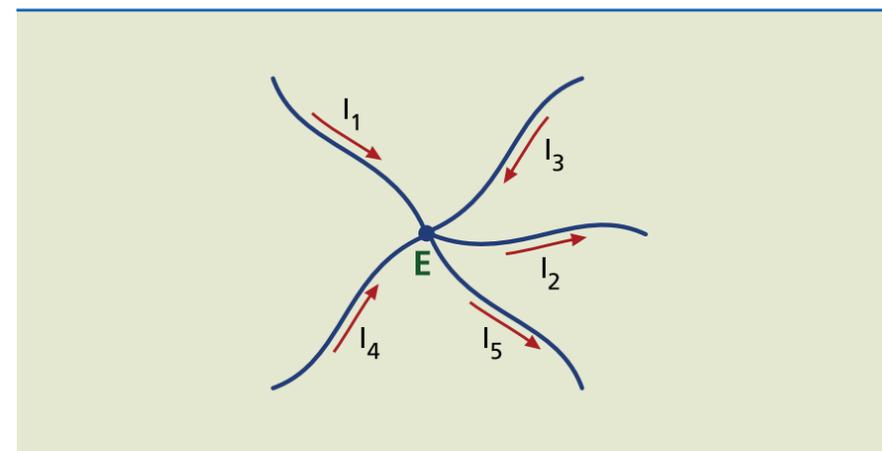
### 6.2 Primeira lei de Kirchhoff ou lei dos nós

A soma das correntes elétricas que entram em determinado nó é igual à soma das correntes que saem dele.

Isso é o mesmo que dizer:

A soma das correntes em um nó é nula.

No segundo enunciado, é preciso estabelecer um sinal para as correntes que chegam e um sinal contrário para as correntes que saem do nó, como mostra a figura 6.2.



**Figura 6.2**  
Correntes nos condutores de um nó.

Nesse exemplo, tem-se  $I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$  (a soma das corrente que entram no nó é igual à soma das correntes que saem dele). As correntes  $I_1, I_3$  e  $I_4$  entram no nó e as correntes  $I_2$  e  $I_5$  saem do nó.

Alternativamente, considerando positivas as correntes que entram no nó e negativas as que saem dele, escreve-se  $(I_1 + I_3 + I_4) - (I_2 + I_5) = 0$  (a soma das correntes em um nó é nula). Nota-se que as duas fórmulas são idênticas.



### 6.3 Segunda lei de Kirchhoff ou lei das malhas

Percorrendo uma malha em determinado sentido, a soma das tensões que têm o mesmo sentido do percurso é igual à soma das tensões que têm sentido contrário.

Esse enunciado equivale a dizer:

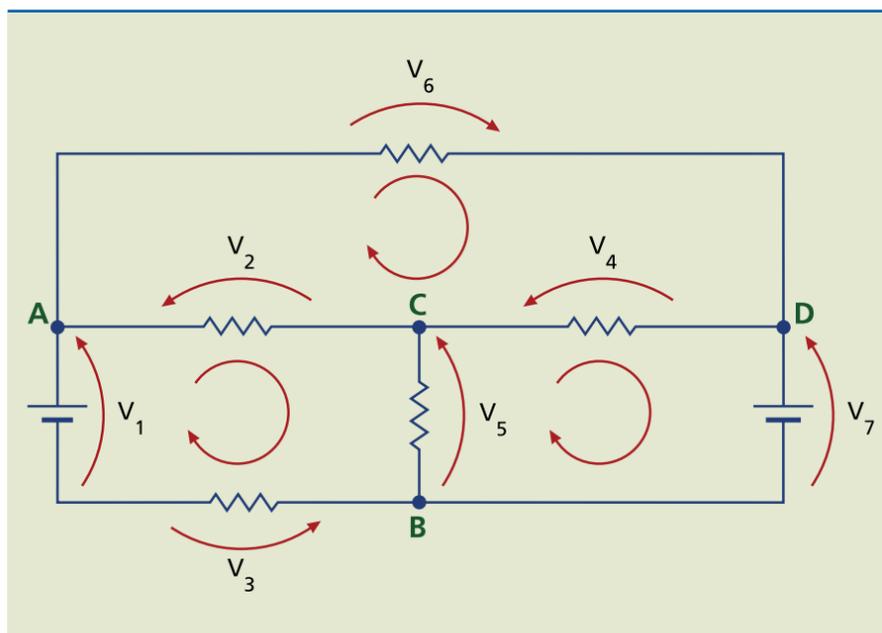
A soma algébrica (i.e., levando em consideração o sinal) das tensões em uma malha percorrida em determinado sentido é nula.

Da mesma forma que na primeira lei, deve-se adotar um sinal para cada sentido de tensão.

#### Exemplo

Aplique a segunda lei de Kirchhoff às malhas da figura 6.3

**Figura 6.3**  
Aplicação da segunda lei de Kirchhoff.



*Solução:*

- Malha ABC

A tensão  $V_1$  aponta para o sentido horário, enquanto  $V_5$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  apontam para o sentido anti-horário, resultando em  $V_1 = V_5 + V_2 + V_3$ .

Outro procedimento que se pode aplicar para chegar ao mesmo resultado consiste em percorrer a malha ABC no sentido horário, atribuindo o sinal positivo para as tensões de mesmo sentido e negativo para as de sentido oposto, resultando em  $V_1 - V_5 - V_2 - V_3 = 0$ . Essa equação é idêntica à primeira.

- Malha BCD

Obtém-se  $V_5 = V_4 + V_7$  ou  $V_5 - V_4 - V_7 = 0$ .

- Malha ACD

Obtém-se  $V_6 + V_4 + V_2 = 0$ .

- Malha ACDB

Obtém-se  $V_1 = V_2 + V_3 + V_4 + V_7$  ou  $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_7 = 0$ .

### 6.4 Resolução de circuitos pelo método da análise de malhas (leis de Kirchhoff)

Resolver um circuito elétrico significa determinar as correntes de todos os seus ramos. Com esses valores, é possível encontrar as tensões e as potências de cada dispositivo do circuito.

Para tal finalidade, esta sequência de orientações ajuda na utilização das leis de Kirchhoff:

1. Identificar os nós, ramos e malhas do circuito.
2. Orientar de modo aleatório as correntes de ramo do circuito (caso uma análise simples não permita orientação mais adequada).
3. Orientar as tensões do circuito, tomando como referência essas correntes.
4. Montar equações utilizando as leis de Kirchhoff, em número igual ao de correntes de ramo (incógnitas) existentes. Como o total de nós e malhas no circuito ultrapassa o número de incógnitas, sugere-se adotar a seguinte regra:

$$\text{número}_{\text{equações de malhas}} = \text{número}_{\text{malhas}} - \text{número}_{\text{nós}}$$

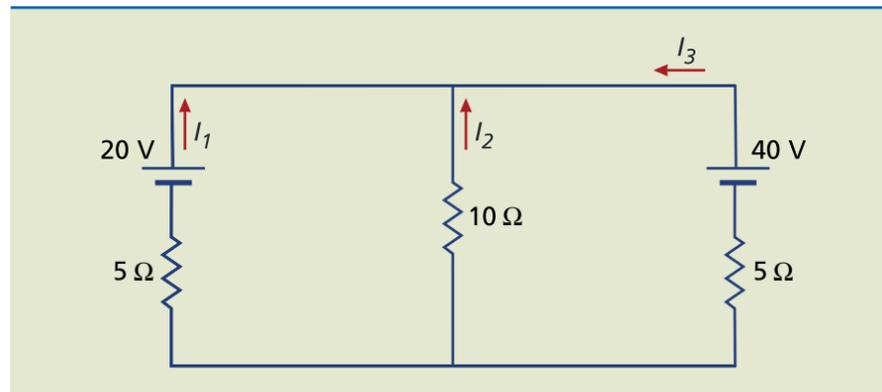
As demais equações serão equações de nós (primeira lei de Kirchhoff).

5. Resolver o sistema de equações por qualquer método. Caso uma ou mais correntes tenham resultado negativo, isso deve ser interpretado como consequência de uma orientação invertida (item 2) no sentido delas, porém o valor obtido em módulo é o correto.



**Exemplo**

Determine as correntes de ramo existentes no circuito da figura 6.4, utilizando as leis de Kirchhoff.

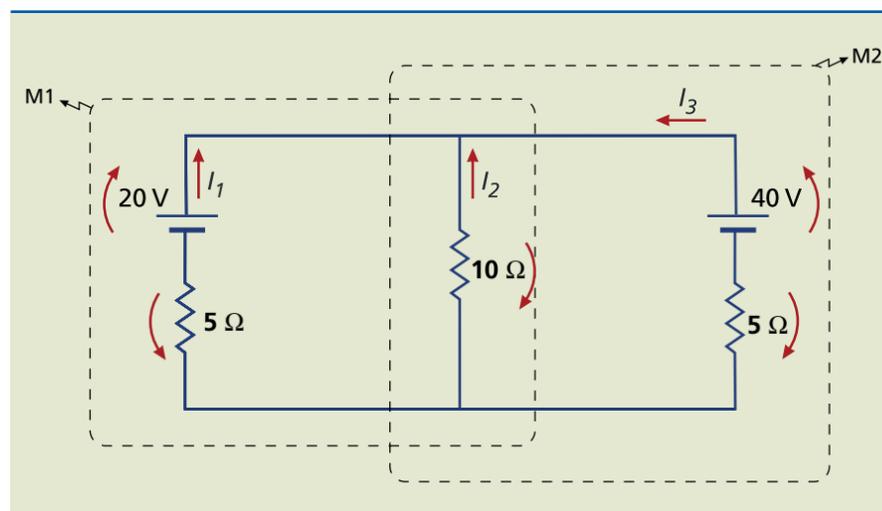
**Figura 6.4**

*Solução:*

1. Determinação dos nós, ramos e malhas: há dois nós (E e F), três ramos (EABF, EF e ECDF), duas malhas simples ou internas (ABFEA e EFDCE) e uma malha externa (ABCD A).

2 e 3. Orientação das correntes: escolhem-se arbitrariamente os sentidos das três correntes de ramo; as tensões nas resistências são orientadas com base nessas escolhas (figura 6.5).

**Figura 6.5**  
Atribuição arbitrária do sentido das correntes de ramo.



4. Montagem das equações:

- Aplica-se a primeira lei de Kirchhoff (lei dos nós) aos dois nós existentes:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (6.1)$$

A soma das três correntes é nula; logo, pode-se concluir que pelo menos uma delas está com sentido invertido em relação ao real.

Observando a orientação dos geradores, é possível afirmar que pelo menos  $I_2$  deve estar com o sentido invertido em relação ao real.

- Aplicando a segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas), apenas para as malhas internas, resulta:

Malha 1 (ABFEA):

$$5I_1 = 10I_2 + 20$$

Dividindo a equação por 5, temos:

$$I_1 - 2I_2 = 4 \quad (6.2)$$

Malha 2 (EFDCE):

$$5I_3 = 10I_2 + 40$$

Dividindo a equação por 5, temos:

$$I_3 - 2I_2 = 8 \quad (6.3)$$

Portanto, temos um sistema de três equações com três incógnitas (correntes):

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (6.1)$$

$$I_1 - 2I_2 = 4 \quad (6.2)$$

$$I_3 - 2I_2 = 8 \quad (6.3)$$

Para resolvê-lo, podemos deixar a corrente  $I_1$  isolada no primeiro membro da equação 6.2 e fazer o mesmo para a corrente  $I_3$  na equação 6.3. As duas equações ficam:

$$I_1 = 2I_2 + 4 \quad (6.2)$$

$$I_3 = 2I_2 + 8 \quad (6.3)$$

Substituindo essas expressões na equação 6.1, temos:

$$2I_2 + 4 + I_2 + 2I_2 + 8 = 0 \rightarrow 5I_2 = -12$$

$$I_2 = -\frac{12}{5} = -2,4 \text{ A} \quad (6.4)$$



Isso significa que o sentido de  $I_2$  adotado no início do exemplo é o inverso do real. No entanto, para a resolução matemática do sistema, mantém-se o sinal obtido em  $I_2$ . Logo, substituindo o valor de  $I_2$  nas equações 6.2 e 6.3 obtemos os valores das correntes  $I_1$  e  $I_3$ :

$$I_1 = 2 \cdot (-2,4) + 4 = -0,8 \text{ A}$$

$$I_3 = 2 \cdot (-2,4) + 8 = 3,2 \text{ A}$$

Portanto, também  $I_1$  tem sentido contrário ao adotado no início do exemplo, ao passo que  $I_3$  está com o sentido correto.

Analisando os resultados obtidos, conclui-se que o gerador de 40 V prevalece sobre o de 25 V, por causa da orientação de ambos. A parcela de  $I_1$  devida ao gerador de 40 V é maior que a do gerador de 25 V (o que pode ser analisado pelo método da superposição de efeitos, que será estudado no capítulo 8).

# Capítulo 7

## Análise de malhas pelo método de Maxwell



Nesse método, cada malha de um circuito (interna ou externa) é percorrida por uma corrente de malha, denominada corrente fictícia de Maxwell. A vantagem em aplicá-lo na resolução de um circuito está no menor número de equações e, portanto, de incógnitas para determinar a intensidade das correntes que o atravessam.

No procedimento proposto por Maxwell, não se utiliza a lei dos nós, a não ser para verificação dos resultados. No final dos cálculos, é necessário analisar algumas correntes de ramo, pois elas são a combinação de duas correntes fictícias de Maxwell ou correntes de malha.

## 7.1 Resolução de circuitos pelo método de Maxwell

Da mesma forma que no método de Kirchhoff, determinam-se os nós, ramos e malhas do circuito, em particular as malhas internas. Em seguida, adota-se arbitrariamente um sentido para as correntes em todos os ramos. Como no método de Kirchhoff, se ao final da resolução a corrente tiver sinal negativo, isso significa que a corrente real tem valor igual ao da corrente calculada, mas sentido oposto.

1. Adota-se um sentido para cada corrente fictícia de malha interna existente no circuito. Para diferenciar as correntes de ramo das correntes de malha, representam-se estas últimas por letras gregas ( $\alpha$ ,  $\beta$  etc.). Então, deixam-se de lado as correntes de ramo, que serão utilizadas apenas na análise final da solução.

2. Montam-se, com base na segunda lei de Kirchhoff, equações de tensões para as malhas internas do circuito. O sentido dessas tensões segue a orientação das correntes de malha adotadas (fictícias).

### Crítérios para montagem das equações de malhas

1. Em um membro da equação, são dispostas as tensões dos geradores e receptores da malha; no outro, as tensões dos vários componentes (resistências).

2. Para a montagem da equação de cada malha, usa-se como referência a corrente fictícia que a percorre. Se, por exemplo, a corrente da malha 1 for  $\alpha$ , ela será a referência – as tensões produzidas por  $\alpha$  serão positivas. Como existem ramos que pertencem a duas malhas simultaneamente, o efeito da corrente da outra malha deve ser levado em consideração. As tensões dos geradores do ramo comum são consideradas uma única vez.

3. Para os geradores, vale o sinal do polo de onde sai a corrente da malha em estudo. Suponhamos, por exemplo, que a malha 1 seja percorrida pela corrente de referência  $\alpha$ . Se a corrente, em seu percurso, “sair” pelo polo positivo de um gerador, atribui-se sinal positivo; se ela “entrar” no polo positivo, a tensão recebe sinal negativo.

4. Resolve-se o sistema de equações e determinam-se os valores das correntes de malha existentes ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc.).

5. Obtidos esses valores, montam-se as equações para as correntes de ramo existentes, com os sinais em função das correntes de malha.

### Exemplo

Determine as correntes do circuito da figura 7.1, utilizando o método de Maxwell.

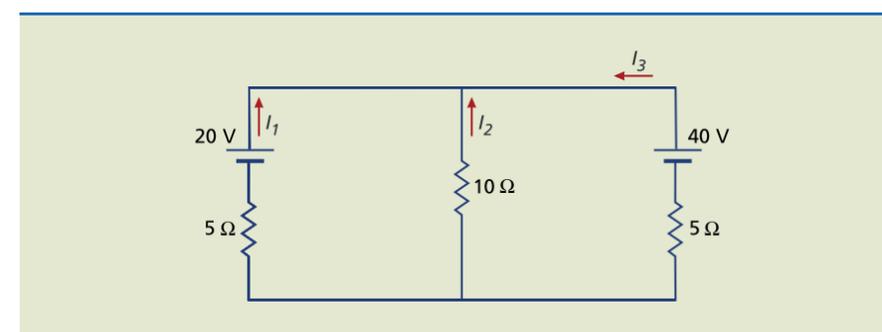


Figura 7.1  
Circuito elétrico.

**Nota:** o circuito utilizado é o mesmo do exemplo do final do capítulo anterior, para facilitar a comparação entre os métodos de Kirchhoff e Maxwell.

### Solução:

Adota-se um sentido arbitrário para as correntes das duas malhas internas existentes, conforme indicado na figura 7.2. Não é necessário que as correntes de malha tenham o mesmo sentido.

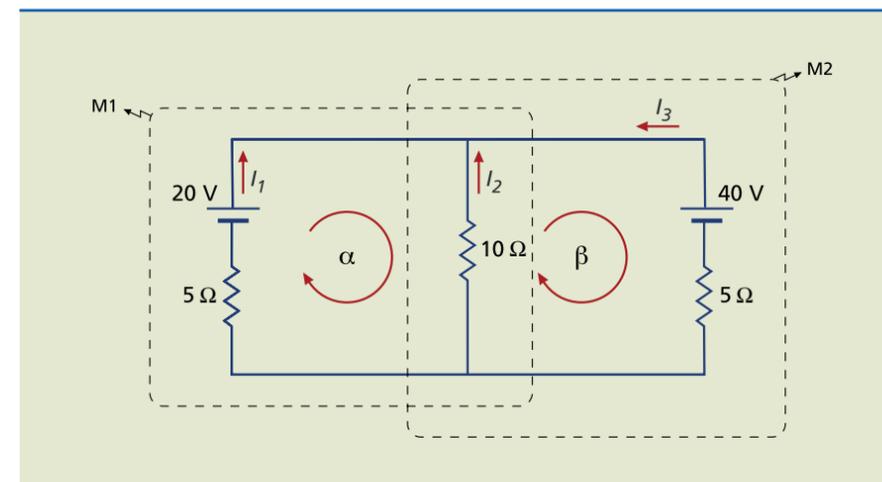


Figura 7.2  
Circuito com duas malhas internas:  $M_1$  e  $M_2$ .



- Malha 1 ( $M_1$ )

$$10\alpha + 5\alpha - 10\beta = 20$$

$$15\alpha - 10\beta = 20$$

Podemos simplificar a equação, dividindo ambos os membros por 5:

$$3\alpha - 2\beta = 4 \quad (7.1)$$

- Malha 2 ( $M_2$ )

$$10\beta + 5\beta - 10\alpha = -40$$

$$15\beta - 10\alpha = -40$$

Simplificamos a equação, dividindo ambos os membros por 5:

$$-2\alpha + 3\beta = -8 \quad (7.2)$$

Assim, no método de Maxwell obtemos menor número de equações (duas, neste exemplo).

Multiplicando a equação 7.1 por 2 e a 7.2 por 3 e somando ambas, membro a membro, obtém-se:

$$6\alpha - 4\beta - 6\alpha + 9\beta = -16$$

$$5\beta = -16 \quad (7.3)$$

Da equação 7.3, temos:

$$\beta = -\frac{16}{5} \Rightarrow \beta = -3,2 \text{ A}$$

Também nesse caso o sinal negativo representa apenas uma inversão no sentido da corrente  $\beta$ .

Substituindo  $\beta$  na equação 7.1:

$$3\alpha - 2 \cdot (-3,2) = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4 - 6,4}{3} \Rightarrow \alpha = -0,8 \text{ A}$$

Montam-se, então, as equações para as correntes de ramo:

$$I_1 = \alpha = -0,8 \text{ A (sentido contrário ao adotado)}$$

$$I_2 = -\alpha + \beta = -(-0,8) + (-3,2) = -2,4 \text{ A (sentido contrário ao adotado)}$$

$$I_3 = -\beta = -(-3,2) = 3,2 \text{ A}$$

Os resultados obtidos são os mesmos da solução pelo método de Kirchhoff, porém com trabalho matemático menor.



# Capítulo 8

## Superposição de efeitos



Nesse método, analisa-se a influência de cada gerador, separadamente, sobre o circuito e no final se faz a composição ou superposição dos efeitos.

A finalidade do método é também a determinação das correntes de ramo do circuito.

## 8.1 Resolução de circuitos pelo método da superposição de efeitos

As orientações a seguir servem para a aplicação desse método.

1. Estabelecem-se de modo arbitrário, como nos métodos de Kirchhoff e Maxwell, as correntes de ramo do circuito.
2. Escolhe-se um dos geradores do circuito para estudo e retiram-se os demais, observando que:
  - o gerador de tensão deve ser substituído por curto-circuito;
  - o gerador de corrente deve ser substituído por circuito aberto.
3. No circuito novo, com um único gerador, orientam-se as correntes de ramo existentes, lembrando que a corrente “sai” do polo positivo do gerador.
4. Utilizando qualquer método para solução de circuito conhecido (Kirchhoff, Maxwell etc.), determinam-se as correntes de ramo para o gerador escolhido.
5. Repetem-se os passos 2, 3 e 4 para os demais geradores do circuito.
6. Comparam-se as correntes de ramo com as correntes obtidas dos vários geradores do circuito de modo individual. Determina-se a corrente resultante para cada ramo do circuito, sendo positivas as correntes de sentido coincidente com as adotadas e negativas as com sentido contrário. Como sempre, o sinal negativo, obtido na solução das correntes, representa apenas a inversão no sentido adotado, mantendo seu valor numérico.

### Exemplo

Determine as correntes do circuito da figura 8.1 utilizando o método da superposição de efeitos.

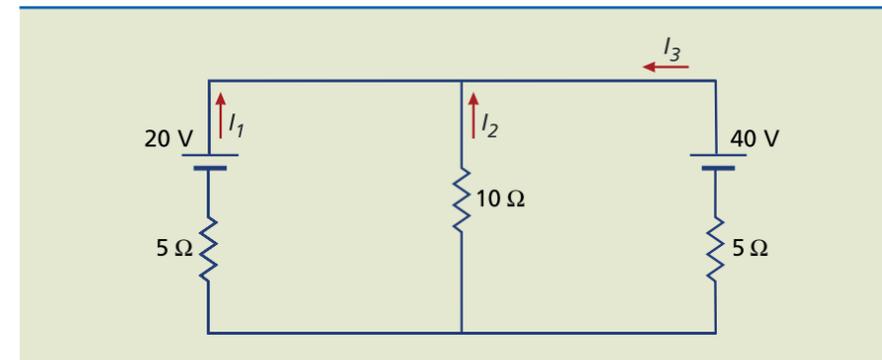


Figura 8.1  
Circuito elétrico.

Solução:

Vamos escolher para análise o gerador de 20 V (gerador 1). O gerador de 40 V, nesse caso, passa a ser representado por um curto-circuito, como indicado na figura 8.2.

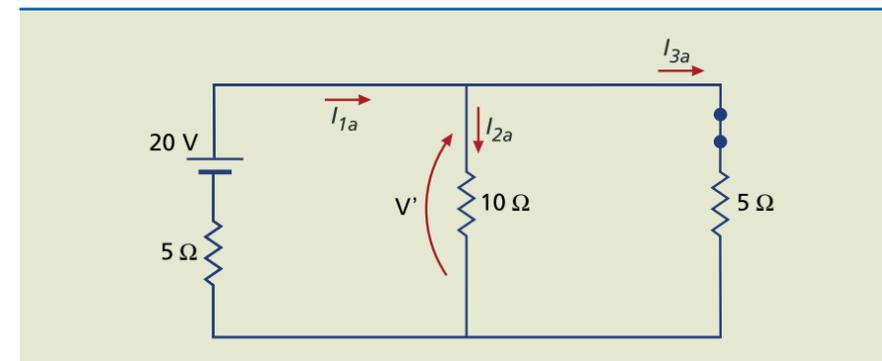


Figura 8.2  
Circuito com gerador retirado.

Os sentidos representados têm como orientação a corrente convencional, “saindo” do polo positivo do gerador e retornando pelo negativo. A figura 8.3 apresenta o novo circuito obtido, cujos parâmetros é possível agora determinar.

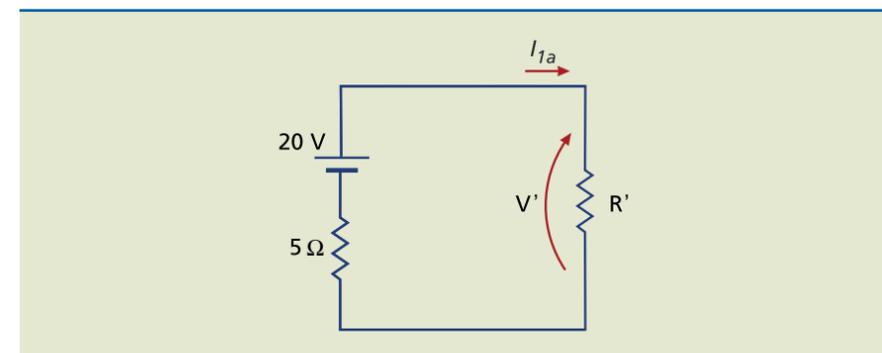


Figura 8.3  
Circuito 8.2 simplificado.



$$R' = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} = 3,33 \, \Omega$$

$$I_{1a} = \frac{20}{5 + 3,33} = 2,4 \, \text{A}$$

$$V' = I_{1a} R' = 2,4 \cdot 3,33 \approx 8 \, \text{V}$$

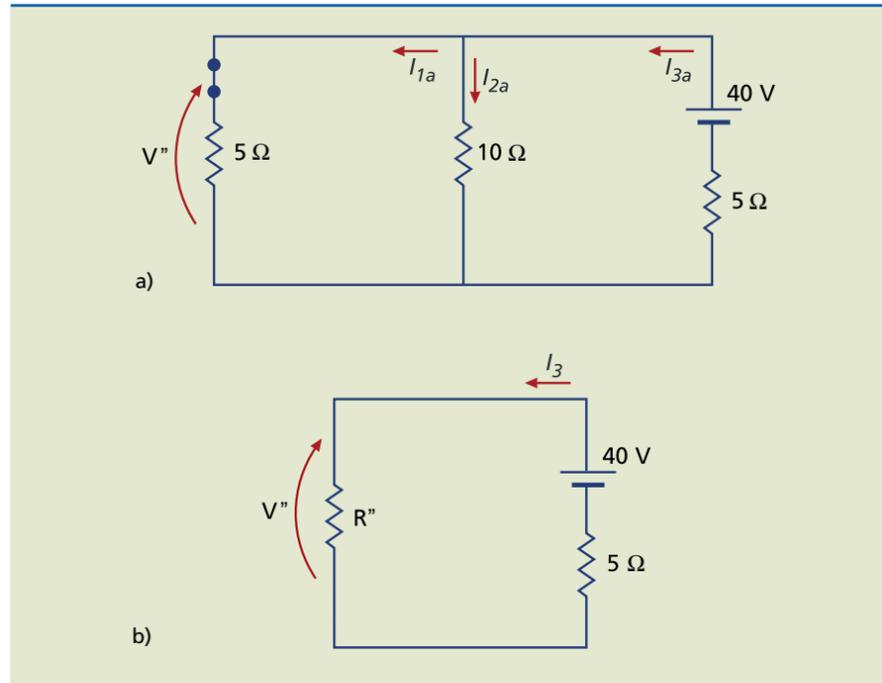
$$I_{2a} = \frac{V'}{10} = \frac{8}{10} = 0,8 \, \text{A}$$

$$I_{3a} = \frac{V'}{5} = \frac{8}{5} = 1,6 \, \text{A}$$

Repetindo o procedimento para o gerador de 40 V e simplificando o circuito (figura 8.4), obtêm-se os parâmetros a seguir:

**Figura 8.4**

(a) Circuito com gerador retirado e  
(b) circuito simplificado.



$$R'' = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} = 3,33 \, \Omega$$

$$I_{3b} = \frac{40}{5 + 3,33} \approx 4,8 \, \text{A}$$

$$V'' = I_{3b} R'' = 4,8 \cdot 3,33 \approx 16 \, \text{V}$$

$$I_{2b} = \frac{V''}{10} = \frac{16}{10} = 1,6 \, \text{A}$$

$$I_{1b} = \frac{V''}{5} = \frac{16}{5} = 3,2 \, \text{A}$$

Fazendo a composição dos efeitos dos dois geradores, obtêm-se:

$$I_1 = I_{1a} - I_{1b} = 2,4 - 3,2 = 0,8 \, \text{A} \text{ (sentido contrário ao adotado)}$$

$$I_2 = I_{2a} - I_{2b} = 0,8 - 1,6 = -0,8 \, \text{A} \text{ (sentido contrário ao adotado)}$$

$$I_3 = -I_{3a} + I_{3b} = -1,6 + 4,8 = 3,2 \, \text{A}$$

A principal característica desse método é a visualização da influência de cada gerador sobre as correntes do circuito.

Os três métodos levam ao mesmo resultado; a escolha por um deles é livre.



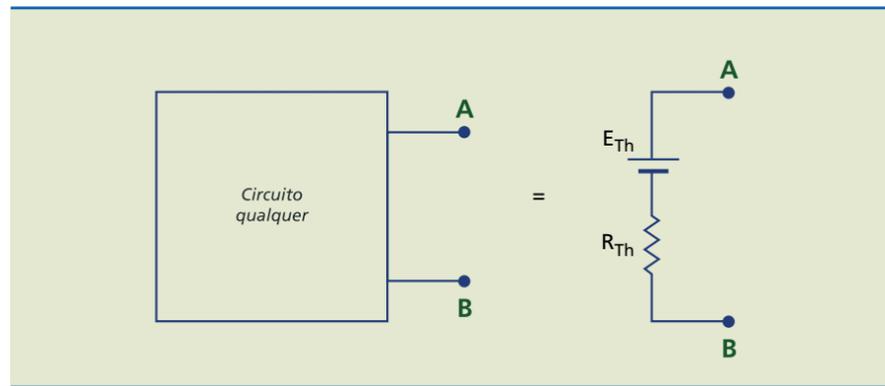
# Capítulo 9

## Teoremas de Thévenin e Norton

## 9.1 Teorema de Thévenin

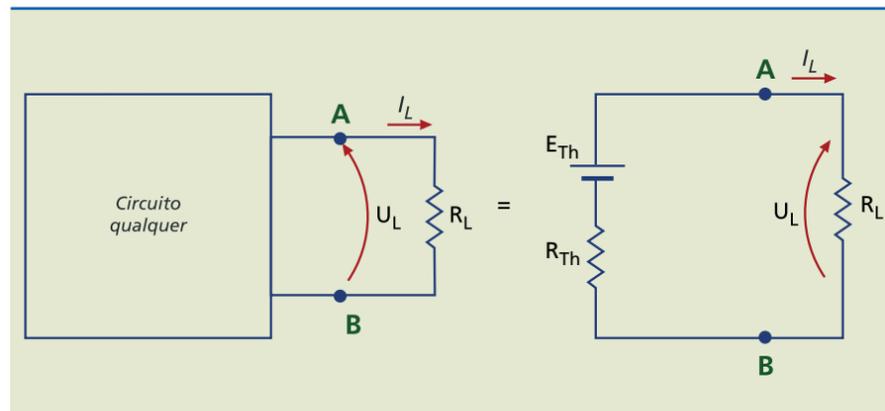
Escolhidos dois pontos em um circuito elétrico qualquer, os efeitos do circuito sobre eles podem ser representados por um gerador de tensão, com sua respectiva resistência interna, chamado gerador equivalente de Thévenin (figura 9.1).

**Figura 9.1**  
Gerador equivalente de Thévenin.



Quanto aos efeitos produzidos, vamos considerar uma mesma carga  $R_L$  (figura 9.2) ligada a um circuito qualquer e ao gerador equivalente de Thévenin. Nos dois casos, a tensão e a corrente sobre essa carga serão as mesmas.

**Figura 9.2**  
Circuito ligado a uma carga e ao gerador equivalente de Thévenin.



Esse processo permite determinar a tensão em um componente do circuito, sem a necessidade de calcular outros parâmetros.

Na prática, tal método se aplica, por exemplo, quando um componente do circuito assume valores distintos e se deseja determinar as medidas de tensão para cada um deles.

### 9.1.1 Determinação do gerador equivalente de Thévenin

1. Retiram-se do circuito os componentes do ramo a ser analisado, ou seja, determinam-se os pontos A e B de estudo, deixando-os em vazio.

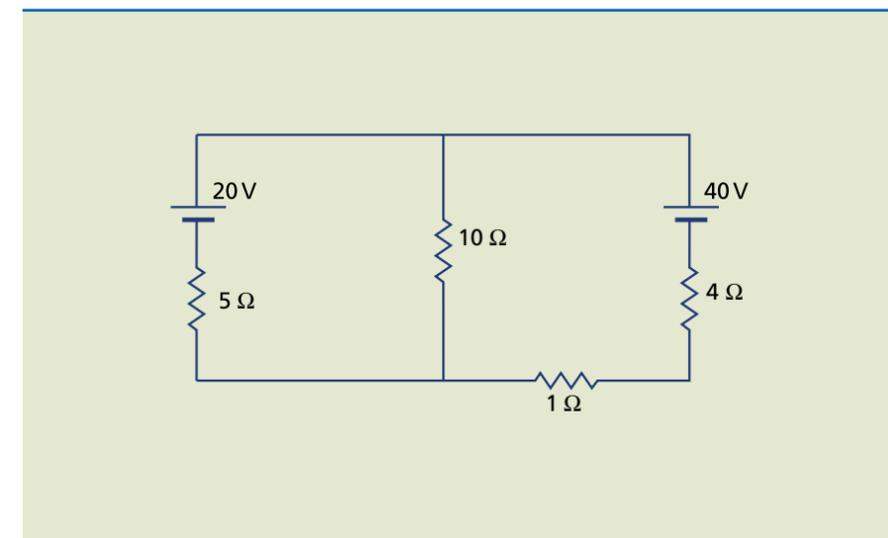
2. A tensão do gerador de Thévenin ( $E_{Th}$ ) é a tensão entre os pontos A e B em vazio (sem carga). Para determinação dessa tensão, pode-se utilizar qualquer método de resolução de circuitos conhecido.

3. A resistência interna do gerador de Thévenin ( $R_{Th}$ ) é a resistência vista entre os pontos A e B do circuito em vazio. Como já estudado, a medida da resistência elétrica não pode ser efetuada com o circuito energizado; logo, é preciso retirar os geradores do circuito, lembrando que:

- o gerador de tensão deve ser substituído por curto-circuito;
- o gerador de corrente deve ser substituído por circuito aberto.

#### Exemplo

Determine a corrente que percorre a resistência de  $4\ \Omega$  no circuito da figura 9.3, utilizando o teorema de Thévenin.



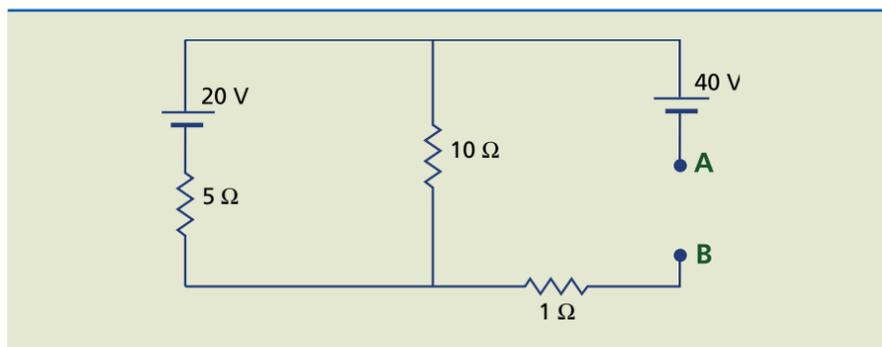
**Figura 9.3**  
Circuito elétrico.

*Solução:*

Retirando a resistência de  $4\ \Omega$ , obtém-se o circuito da figura 9.4.



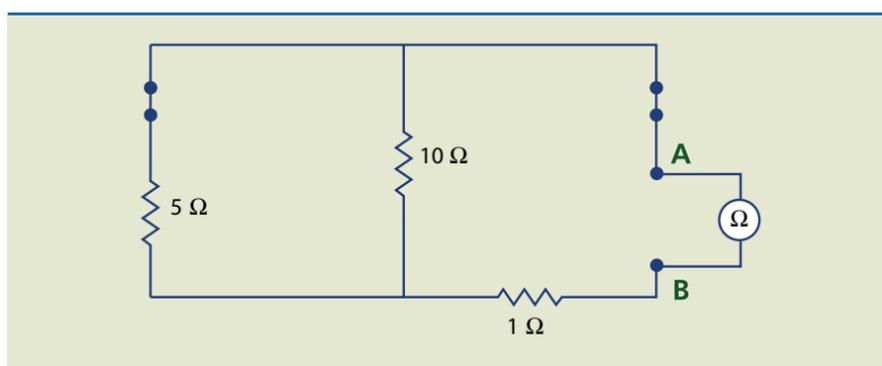
**Figura 9.4**  
Circuito simplificado aberto.



**Determinação de  $R_{Th}$**

Substituem-se os geradores de tensão por curto-circuito, como na figura 9.5.

**Figura 9.5**  
Circuito com geradores substituídos por curto-circuito.



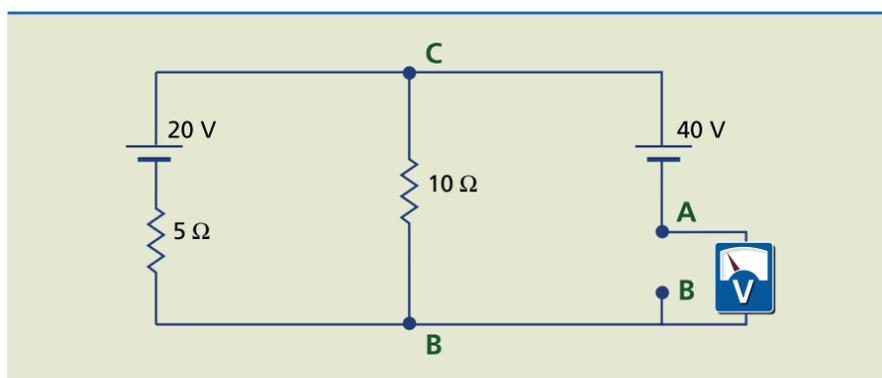
No novo circuito:

$$R_{Th} = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} + 1 = 4,33 \Omega$$

**Determinação de  $E_{Th}$**

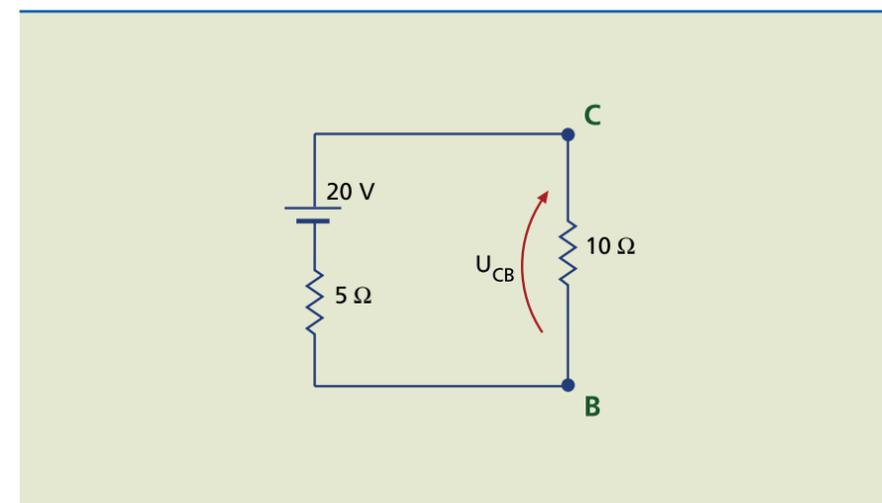
Como o circuito está aberto entre os pontos A e B, não circula corrente pela resistência de 1 Ω; logo, não há tensão sobre ela. Portanto, para efeitos de tensão, pode-se eliminar a resistência de 1 Ω (figura 9.6).

**Figura 9.6**  
Circuito com resistência em aberto eliminada.



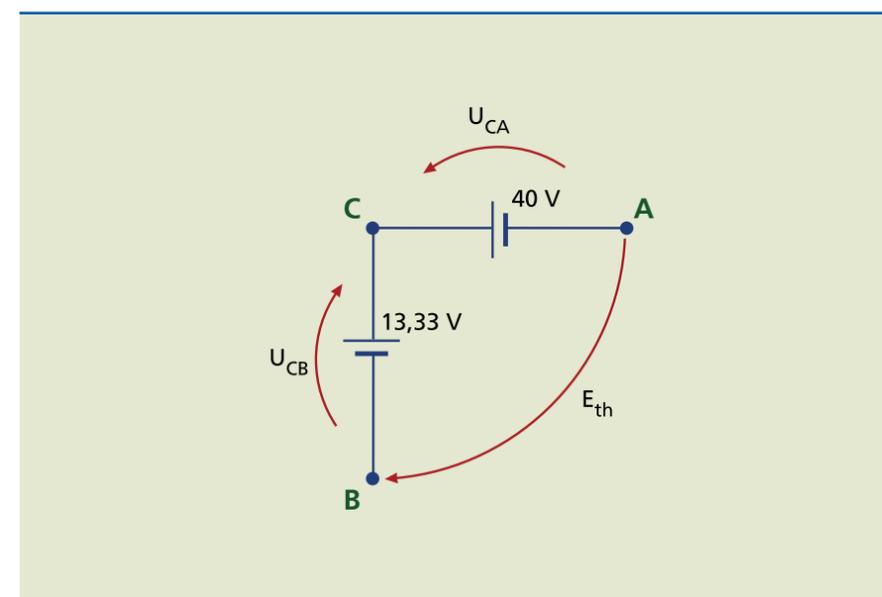
Para facilitar a solução, deixa-se de lado, temporariamente, o gerador de 40 V e determina-se a tensão entre os pontos C e B (figura 9.7):

$$U_{CB} = U_{R_{10}} = \frac{20 \cdot 10}{5 + 10} = 13,33 \text{ V}$$



**Figura 9.7**  
Circuito parcial, sem o gerador de 40V.

A figura 9.8 mostra o circuito representado apenas pelas tensões.



**Figura 9.8**  
Simplificação do circuito.

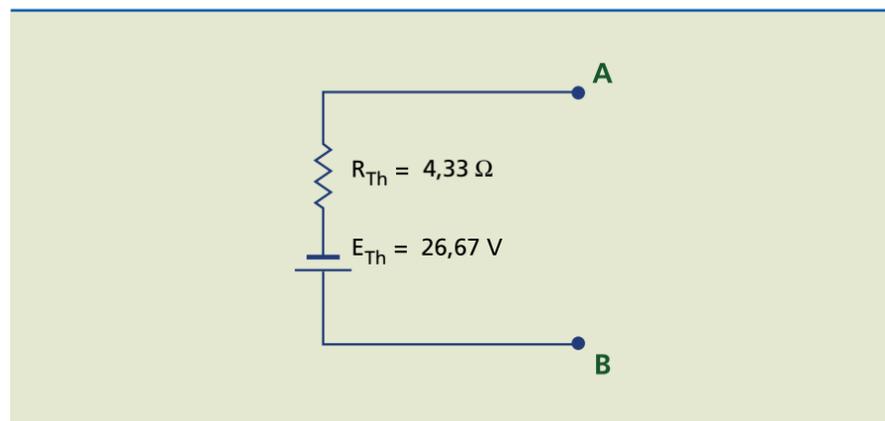
Como o gerador de 40 V prevalece sobre o de 13,33 V:

$$E_{Th} = U_{BA} = 40 - 13,33 = 26,67 \text{ V}$$

Portanto, o gerador de Thévenin entre os pontos A e B será o da figura 9.9.



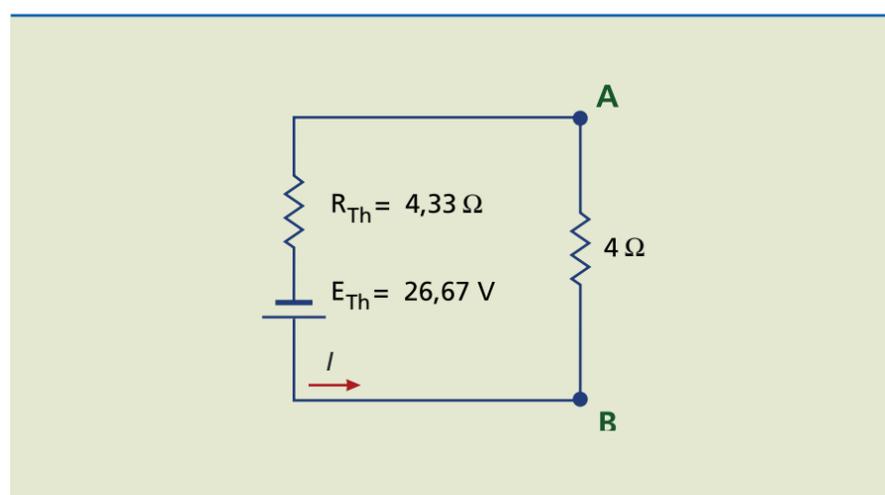
**Figura 9.9**  
Gerador equivalente de Thévenin.



Recolocando no circuito a resistência de 4 Ω (figura 9.10), pode-se calcular a corrente que a atravessa:

$$I = \frac{26,67}{4,33 + 4} = 3,2 \text{ A}$$

**Figura 9.10**  
Gerador de Thévenin conectado à resistência.

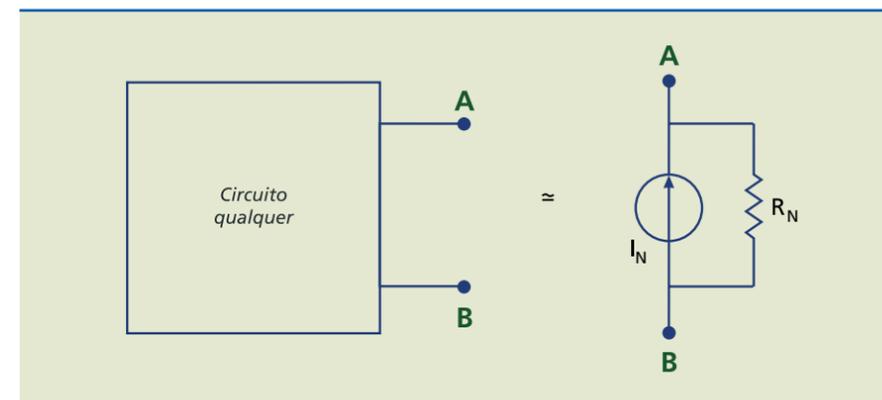


Esse valor coincide com o obtido pelos outros métodos.

## 9.2 Teorema de Norton

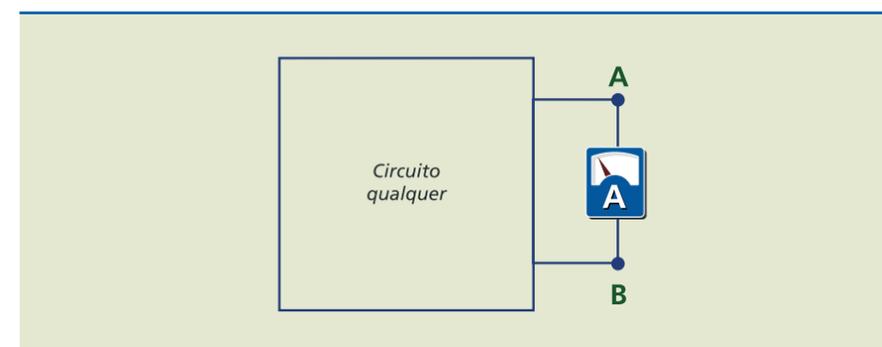
O teorema de Norton tem por objetivo a simplificação de circuitos, tal como o de Thévenin, mas difere deste por se destinar à medida da corrente em determinado ramo do circuito.

Escolhidos dois pontos de um circuito elétrico qualquer, os efeitos do circuito sobre esses dois pontos (em vazio, sem carga) podem ser representados por um gerador de corrente, com uma resistência em paralelo, chamado gerador equivalente de Norton (figura 9.11).



**Figura 9.11**  
Gerador equivalente de Norton.

Da mesma forma que no gerador de Thévenin, escolhem-se dois pontos A e B entre os quais se pretende determinar a corrente. Nesse caso, é como se ambos os pontos fossem colocados em curto-circuito por um amperímetro (figura 9.12).



**Figura 9.12**  
No gerador equivalente de Norton, os pontos A e B estão em curto-circuito.

A resistência do gerador de Norton é a mesma do gerador de Thévenin.

Logo, pela dualidade entre os geradores de tensão e corrente, temos:

$$R_{Th} = R_N$$

$$E_{Th} = R_N I_N \quad (9.1)$$

O uso de geradores de corrente não é muito comum. Sugere-se a utilização da dualidade entre os geradores e consequente solução por Thévenin e depois nova conversão por dualidade para o gerador de corrente de Norton.



# Capítulo 10

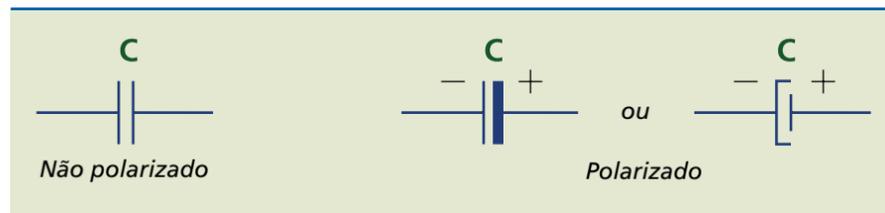
## Capacitores e indutores em corrente contínua

## 10.1 Capacitores

São dispositivos cuja finalidade é armazenar cargas elétricas em suas armaduras. Ao se carregarem, acumulam energia potencial elétrica devido ao campo elétrico na região entre elas. Sua representação em circuitos elétricos é ilustrada na figura 10.1.

**Figura 10.1**

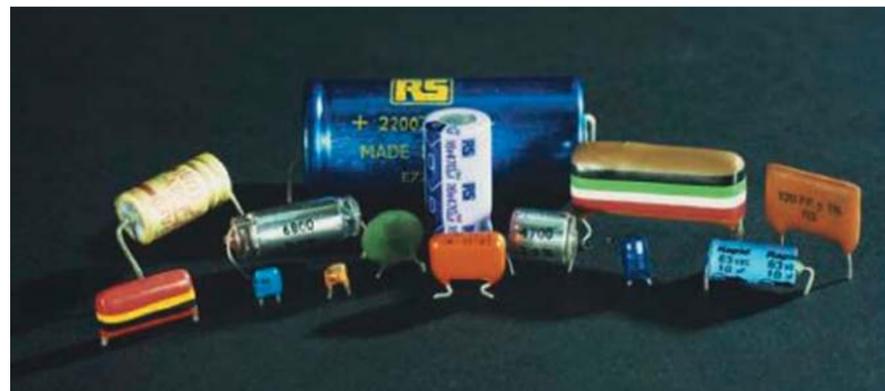
Simbologias do capacitor:



Os capacitores também são chamados de condensadores e os tipos mais comuns são de mica, poliéster, cerâmica e eletrolítico (figura 10.2).

**Figura 10.2**

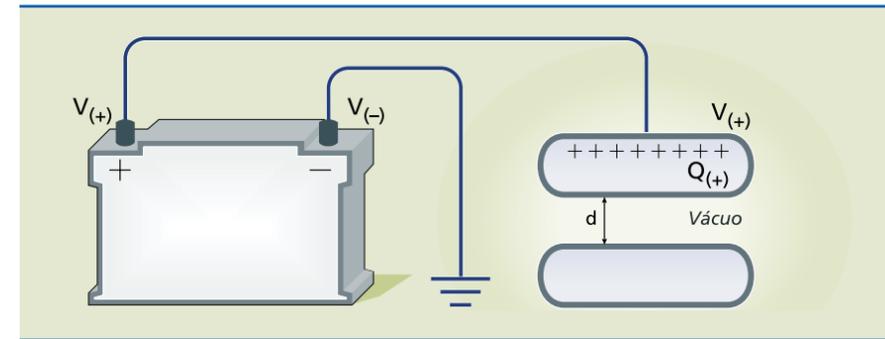
Diversos tipos de capacitor:



ANDREW LAMBERT PHOTOGRAPHY / SCIENCE PHOTO LIBRARY / ISTOCK

### 10.1.1 Princípio de funcionamento

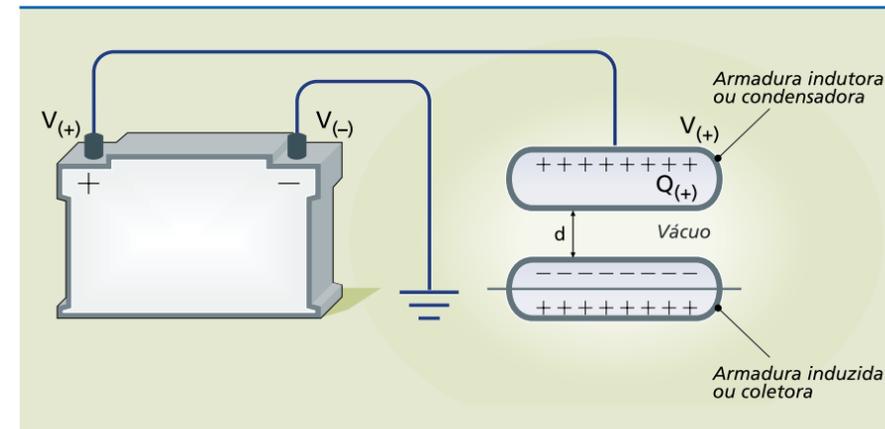
Consideremos um capacitor de armaduras separadas pelo vácuo e inicialmente neutras. Ao ligar uma delas ao polo positivo de uma bateria (figura 10.3), ela adquire, por contato, carga e potencial elétrico positivos. Para facilitar a transferência de cargas elétricas entre a armadura e a bateria, liga-se o outro polo à terra.



**Figura 10.3**

Bateria ligada à armadura e à terra.

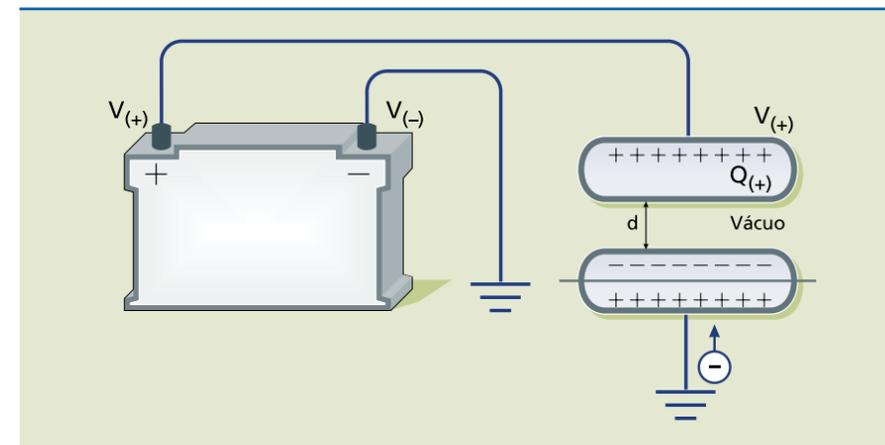
Pelo processo de indução, ocorre na outra armadura separação de cargas elétricas. Cargas de sinais contrários passam a situar-se em regiões distintas dessa armadura, que permanece eletricamente neutra. A partir desse instante, a primeira armadura passa a ser denominada de armadura indutora ou condensadora e a segunda, onde ocorre a separação de cargas, de armadura induzida ou coletora (figura 10.4).



**Figura 10.4**

Na armadura induzida, eletricamente neutra, as cargas situam-se em regiões opostas.

Em seguida, liga-se a armadura induzida à terra. Há, então, transferência de cargas elétricas negativas para o capacitor, anulando as positivas e fazendo com que a armadura induzida adquira carga e potencial elétrico negativos (figura 10.5).



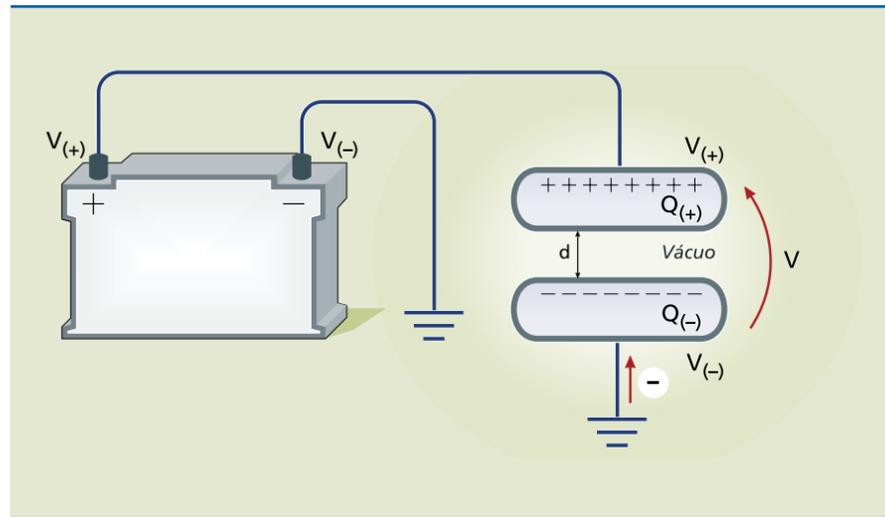
**Figura 10.5**

Ao ser ligada à terra, a armadura induzida fica com carga elétrica negativa.



Cessado o processo, o capacitor está carregado, ou seja, tem carga elétrica em suas armaduras e apresenta tensão entre elas (figura 10.6).

**Figura 10.6**  
Capacitor carregado.



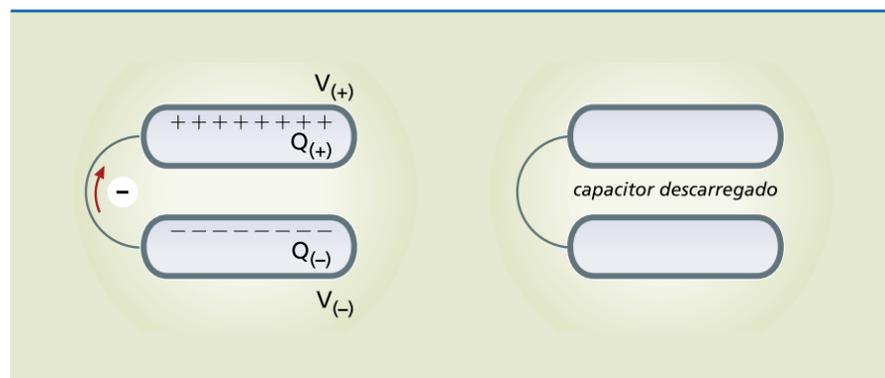
Para obter a maior tensão possível entre as armaduras, é necessário que ocorra indução completa, ou seja, que para cada carga em uma das armaduras corresponda uma de sinal contrário na outra armadura. Isso só é possível quando as armaduras são idênticas (mesmo formato, dimensões e material).

**Na prática**

Note-se que, no exemplo, tanto o polo negativo como a armadura induzida são ligados à terra. Na prática, elimina-se essa ligação, conectando-se diretamente os dois pontos.

Para descarregar o capacitor, basta interligar suas armaduras com um fio (figura 10.7), elemento cuja capacitância e resistência elétrica podem ser consideradas desprezíveis. Surge, em decorrência, uma corrente elétrica instantânea no fio, que cessa quando as duas armaduras se tornam novamente neutras.

**Figura 10.7**  
Conectando as armaduras, o capacitor se descarrega.



**10.1.2 Capacitância**

Carga de um capacitor é a carga elétrica armazenada na armadura positiva.

Capacitância ou capacidade eletrostática é a grandeza que indica a capacidade do componente de armazenar cargas, expressa pela relação:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (10.1)$$

em que:

- V é a tensão entre as armaduras do capacitor, medida em volt;
- Q a carga da armadura positiva do capacitor, em coulomb;
- C a capacitância do capacitor, dada em **farad**.

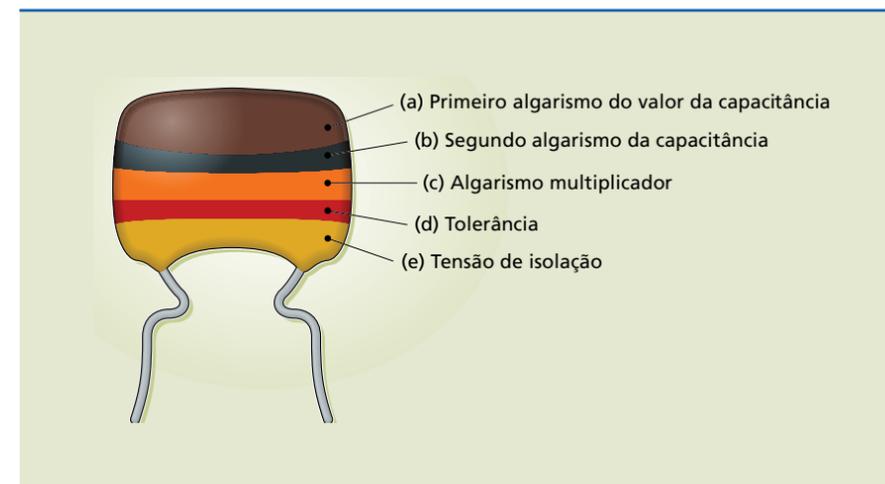
O farad (F) é uma homenagem ao físico britânico Michael Faraday (1791-1867).

Essa unidade é de ordem de grandeza elevada, por isso costuma-se trabalhar com seus submúltiplos:

- Microfarad:  $1 \mu F = 10^{-6} F$
- Nanofarad:  $1 nF = 10^{-9} F$
- Picofarad:  $1 pF = 10^{-12} F$

De maneira análoga aos resistores, os capacitores têm valores padronizados de capacitância: 1 – 1,2 – 1,5 – 1,8 – 2,2 – 2,7 – 3,3 – 4,7 – 5,6 – 6,8 – 8,2 com fatores multiplicativos da base 10, de modo a obter valores dentro da faixa estabelecida anteriormente ( $\mu F$  até  $pF$ ).

Sob tensão excessiva, os capacitores podem sofrer danos irreparáveis. A tensão máxima que eles são capazes de suportar entre suas armaduras sem que isso ocorra é chamada tensão de isolamento. Tanto os valores da capacitância como da tensão de isolamento são indicados pelos fabricantes no próprio capacitor. Em alguns deles, a identificação é feita mediante um código de cores associado a algarismos, como mostram a figura 10.8 e a tabela 10.1.



**Figura 10.8**  
Significado das faixas dos capacitores.



**Tabela 10.1**  
Código de cores para capacitores

Cor	Primeira e segunda faixas (a e b)	Terceira faixa (c)	Quarta faixa (d)	Quinta faixa (e)
Preto	0	–	20%	–
Marrom	1	x 101	–	–
Vermelho	2	x 102	–	250 V
Laranja	3	x 103	–	–
Amarelo	4	x 104	–	400 V
Verde	5	x 105	–	–
Azul	6	x 106	–	630 V
Violeta	7	–	–	–
Cinza	8	–	–	–
Branco	9	–	10%	–

### Exemplo

Identifique a capacitância e a tensão dos capacitores indicados nas tabelas 10.2 e 10.3.

**Tabela 10.2**

Faixas	Cores
a	Marrom
b	Preto
c	Laranja
d	Branco
e	Vermelho

**Tabela 10.3**

Faixas	Cores
a	Vermelho
b	Vermelho
c	Amarelo
d	Branco
e	Amarelo

*Solução:*

Tabela 10.2:  $(10 \cdot 10^3 + 10\%)$  pF ou  $(10 + 10\%)$  nF e 250 V.

Tabela 10.3:  $(22 \cdot 10^4 + 10\%)$  pF ou  $(220 + 10\%)$  nF e 400 V.

Atualmente, os capacitores de poliéster metalizado apresentam encapsulamento na cor laranja e seus valores podem estar impressos de forma direta, com a seguinte codificação:

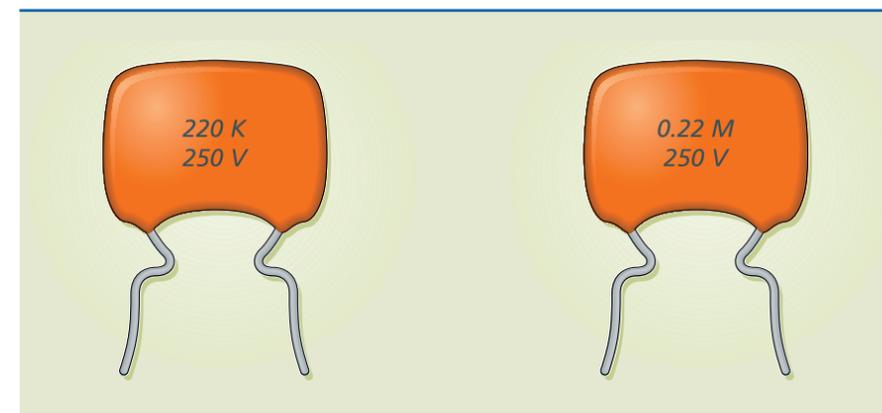
- Se for número inteiro, está expresso em nF.
- Se for número fracionário, está expresso em  $\mu$ F.

A letra que acompanha o valor numérico representa a tolerância, de acordo com o código:

- J = 5%
- K = 10%
- M = 20%

O valor da tensão de isolamento é impresso integralmente, sem código.

A figura 10.9 apresenta dois exemplos desse tipo de capacitor.



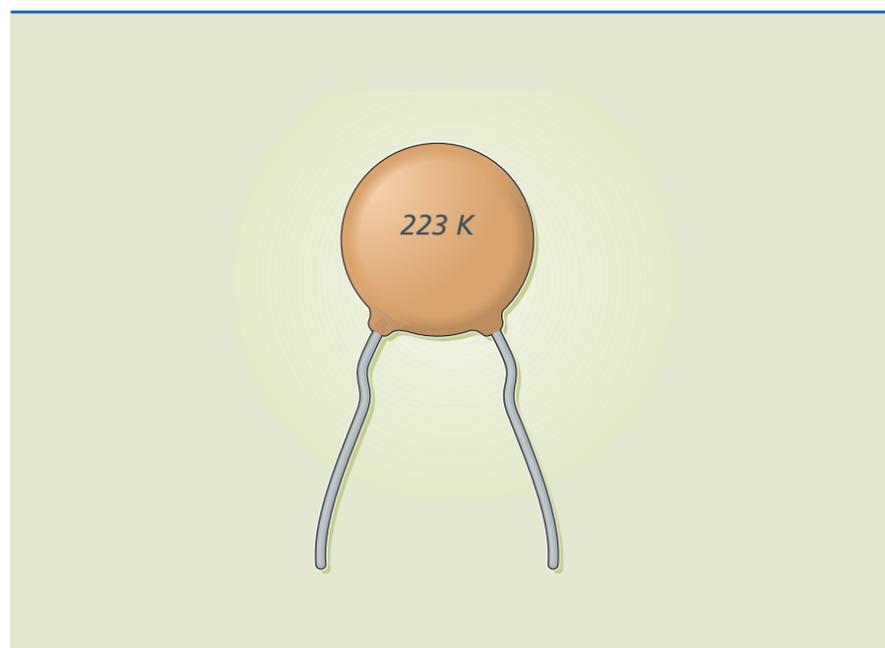
**Figura 10.9**

Relação entre símbolos e unidades nos capacitores de poliéster metalizado.



Existe também um código específico para os capacitores de disco cerâmico.

**Figura 10.10**  
Capacitor de disco cerâmico.



Tomando como exemplo a figura 10.10, a leitura do código do capacitor é a seguinte:

- 2: primeiro algarismo.
- 2: segundo algarismo.
- 3: Algarismo multiplicador ou número de zeros.
- K: Tolerância, em picofarad.

Para capacitores com valores até 10 pF:

- B = 0,10 pF
- C = 0,25 pF
- D = 0,50 pF
- F = 1 pF
- G = 2 pF

Para capacitores de valores acima de 10 pF:

- F = 1%
- G = 2%
- H = 3%
- J = 5%
- K = 10%
- M = 20%
- P = 100%-0%
- S = 50%-20%
- Z = 80%-20%

### Exemplo

Dados os códigos a seguir, identifique a capacitância e a tolerância dos capacitores correspondentes.

- 100 F
- 223 K

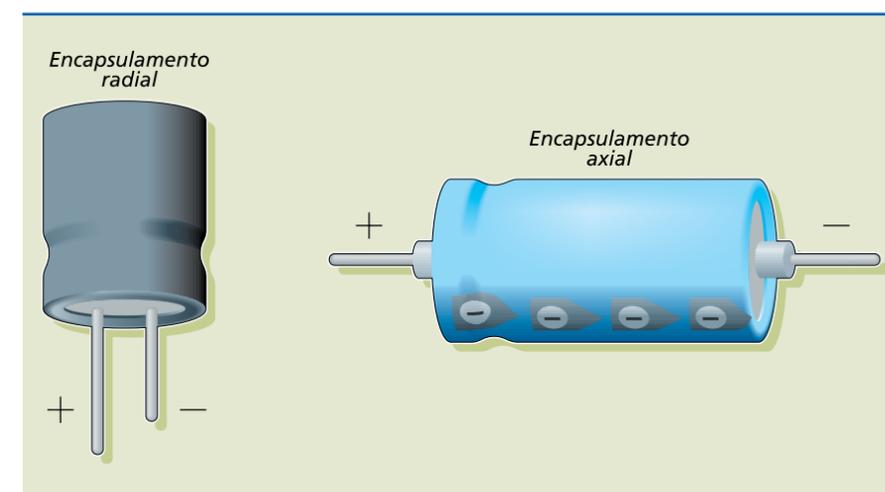
*Solução:*

- 10 pF + 1 pF
- (22 · 10<sup>3</sup> + 10%) pF ou (22 + 10%) nF

Os capacitores eletrolíticos possuem uma camada de óxido de alumínio como dielétrico. Um fluido condutor (eletrólito), impregnado em papel poroso, é colocado em contato com uma folha de alumínio, formando a armadura negativa. A armadura positiva é constituída de uma folha de alumínio anodizada.

Com tal estrutura, se a polaridade dos capacitores eletrolíticos não for respeitada nos circuitos, podem ocorrer reações químicas no eletrólito, produzindo gases e ou até sua explosão.

A capacitância dos capacitores eletrolíticos pode atingir a ordem de 10<sup>3</sup> μF, porém com baixos valores de tensão de isolamento, impressos diretamente no encapsulamento deles. A figura 10.11 mostra dois tipos de encapsulamento.



**Figura 10.11**  
Tipos de encapsulamento de capacitores.

### 10.1.3 Energia armazenada

A energia armazenada pelo capacitor é dada pela expressão:

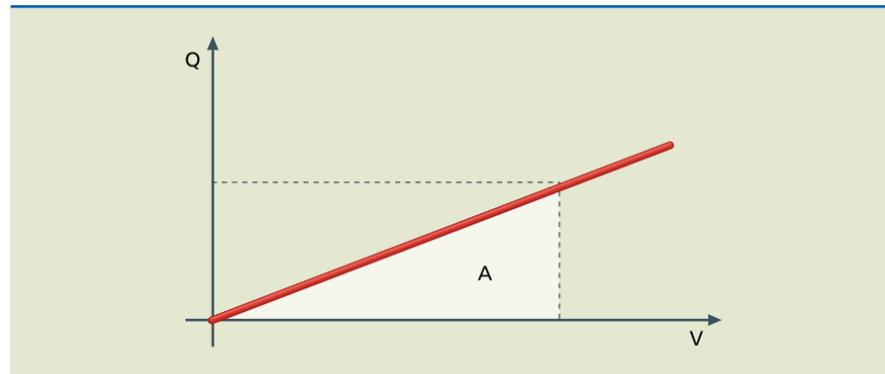
$$E_n = \frac{1}{2} QV \quad (10.2)$$



e pode ser obtida calculando a área no gráfico da carga em função da tensão: (figura 10.12).

**Figura 10.12**

A energia armazenada no capacitor é numericamente igual à área A sob a curva.



A unidade de energia do SI é o joule (J).

Como  $Q = CV$ , pode-se ainda escrever:

$$E_n = \frac{1}{2} CV^2 \quad (10.3)$$

Além disso, como  $V = \frac{Q}{C}$ , é possível também indicar:

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (10.4)$$

**Exemplo**

Qual a carga de um capacitor de  $2,2 \mu\text{F}$ , bem como sua energia armazenada, quando é submetido a uma tensão de  $80 \text{ V}$ ?

*Solução:*

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \Rightarrow Q = 176 \cdot 10^{-6} = 176 \mu\text{C}$$

$$E_n = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 80^2 \Rightarrow E_n = 7,04 \text{ mJ}$$

**10.1.4 Capacitor plano**

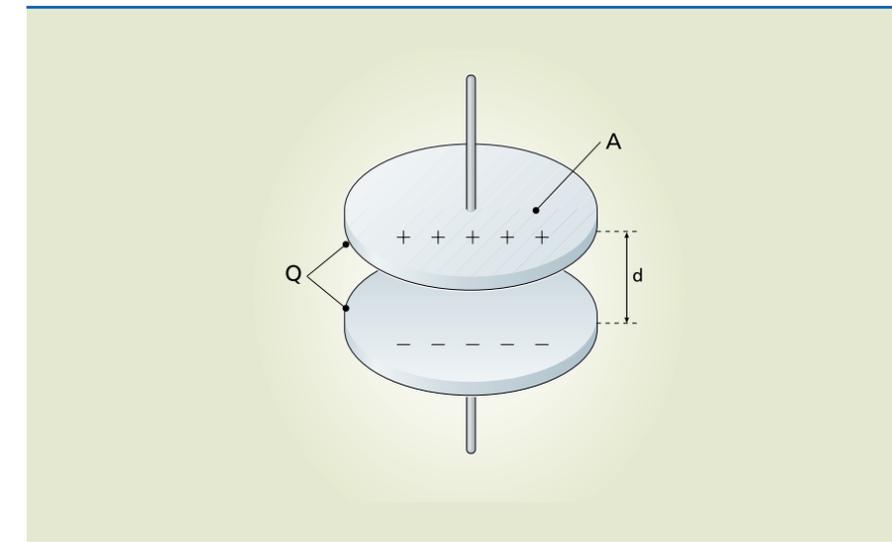
Também denominado capacitor de placas paralelas, é constituído de duas armaduras condutoras, que normalmente são circulares, mas também podem ser retangulares, dispostas paralelamente. Nesse caso, há entre as armaduras do capacitor um campo elétrico uniforme.

Para um capacitor plano com armaduras de área  $A$  (em metro quadrado), com carga armazenada  $Q$  (em coulomb), separadas por uma distância  $d$  (em metro) pelo dielétrico vácuo (figura 10.13), pode-se escrever:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (10.5)$$

em que  $\epsilon_0$  é a permissividade absoluta do vácuo, que no SI vale:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}_2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$



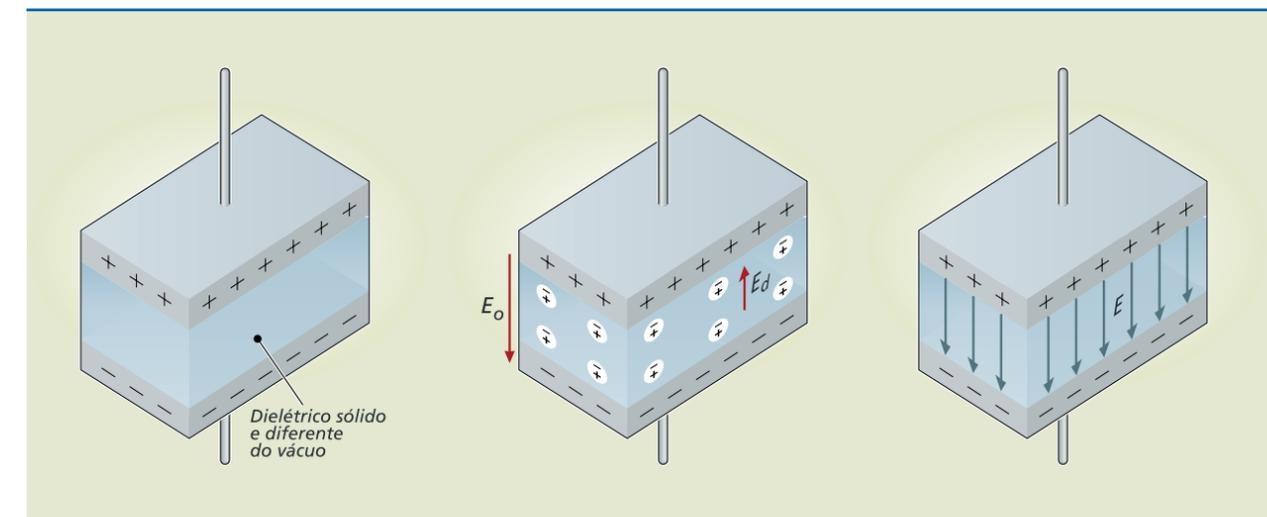
**Figura 10.13**

Parâmetros de um capacitor plano.

Com a inclusão, entre as armaduras do capacitor, de um dielétrico sólido diferente, ocorre diminuição no campo elétrico ( $E$ ) entre elas, devido a efeitos atômicos no dielétrico, como a polarização das partículas em seu interior, que criam um campo  $E_d$  (figura 10.14).

**Figura 10.14**

Efeito de um dielétrico entre as armaduras de um capacitor.



Como  $E = E_0 - E_d$ , logo:  $E < E_0$ .

A relação entre a permissividade em um dielétrico qualquer ( $\epsilon$ ) e a permissividade absoluta do vácuo ( $\epsilon_0$ ) é denominada constante dielétrica ou permissividade relativa ( $\epsilon_r$ ):

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (10.6)$$

ou:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (10.7)$$

A tabela 10.4 apresenta a permissividade relativa de alguns materiais.

**Tabela 10.4**

Permissividade relativa de alguns materiais

Material	$\epsilon_r$
Ar	1,0006 (~1)
Papel parafinado	2,5
Mica	5,0
Vidro	7,5
Cerâmica	7,5

Desse modo, para um capacitor plano com dielétrico, pode-se escrever:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot A}{d} \quad (10.8)$$

ou:

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (10.9)$$

De acordo com os valores de  $\epsilon_r$  apresentados e lembrando que  $C = Q/V$ , pode-se concluir que a vantagem da utilização de um dielétrico qualquer consiste no aumento da capacitância do capacitor, ou, ainda, para uma mesma capacitância e mesma carga armazenada, a tensão aplicada entre as armaduras será menor. Em termos construtivos, é possível também afirmar que, para uma mesma capacitância, as dimensões do capacitor com dielétrico qualquer serão menores.

Assim:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} \Rightarrow \epsilon_r > 1$$

**Exemplos**

1. Dado um capacitor plano, com área de  $1 \text{ cm}^2$ , distância entre as armaduras de  $1 \text{ mm}$  e carga armazenada de  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ , determine sua capacitância e a tensão entre suas armaduras.

*Solução:*

Como não há menção, supõe-se que o dielétrico seja o vácuo:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,0 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow C_0 = 0,885 \text{ pF}$$

$$V_0 = \frac{Q}{C_0} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{0,885 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow V_0 = 10 \text{ V}$$

2. Determine a capacitância e a tensão entre as armaduras do mesmo capacitor, mas com dielétrico mica.

*Solução:*

A permissividade relativa do dielétrico mica é 5. Portanto:

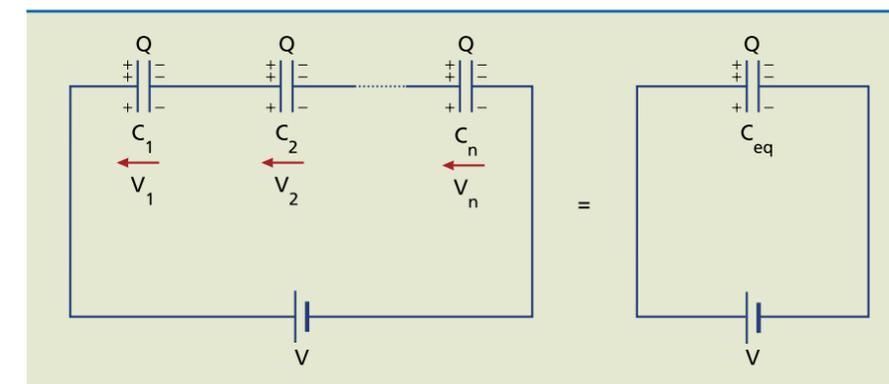
$$C = \epsilon_r C_0 = 5 \cdot 0,885 \cdot 10^{-12} \Rightarrow C = 4,425 \text{ pF}$$

$$V = \frac{Q}{C} \Rightarrow V = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{4,425 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow V = 2 \text{ V}$$

**10.1.5 Associação de capacitores**

Consiste na determinação da capacitância total ou equivalente ( $C_T$  ou  $C_{eq}$ ) que represente numericamente a capacitância de um grupo de capacitores ligados de uma maneira qualquer.

**Associação em série**



**Figura 10.15**  
Associação de capacitores em série e capacitor equivalente.



A carga em cada um dos capacitores será a mesma devido à indução nas armaduras de cada capacitor e entre as armaduras dos capacitores do circuito (figura 10.15). Ou seja:

$$Q = \text{constante}$$

A tensão total é a soma das tensões dos capacitores.

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Como  $V = \frac{Q}{C}$ , então:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

Dividindo a expressão por Q, obtém-se expressão análoga à de resistores em paralelo:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (10.10)$$

Portanto, destacam-se duas situações particulares:

a) Para dois capacitores diferentes em série:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (10.11)$$

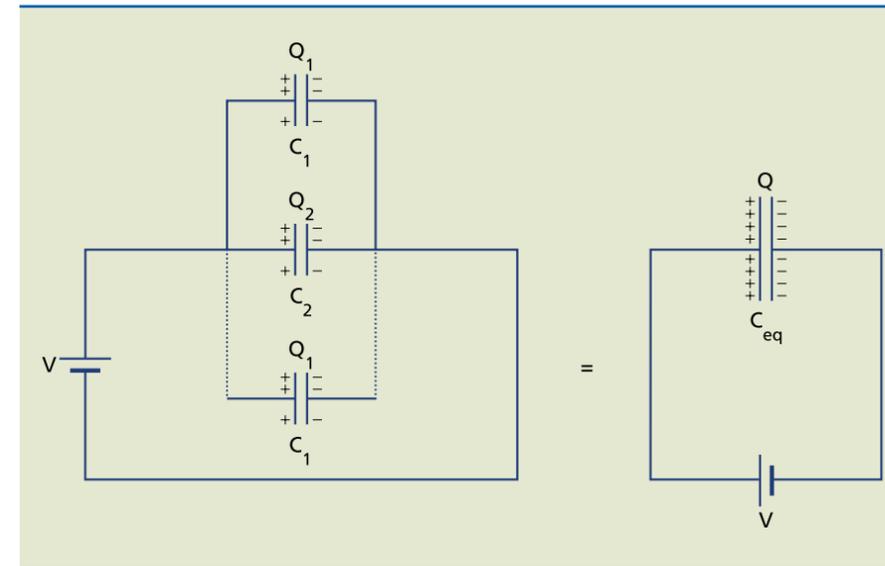
b) Para n capacitores iguais em série:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$$

$$C_{eq} = \frac{C}{n} \quad (10.12)$$

### Associação em paralelo

A tensão entre as armaduras dos capacitores será constante e a carga armazenada em cada um, proporcional a sua capacitância.



**Figura 10.16**  
Associação de capacitores em paralelo e capacitor equivalente.

$$V = \text{constante}$$

Portanto:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (10.13)$$

Como  $Q = CV$ , substituindo as cargas correspondentes na expressão 10.13):

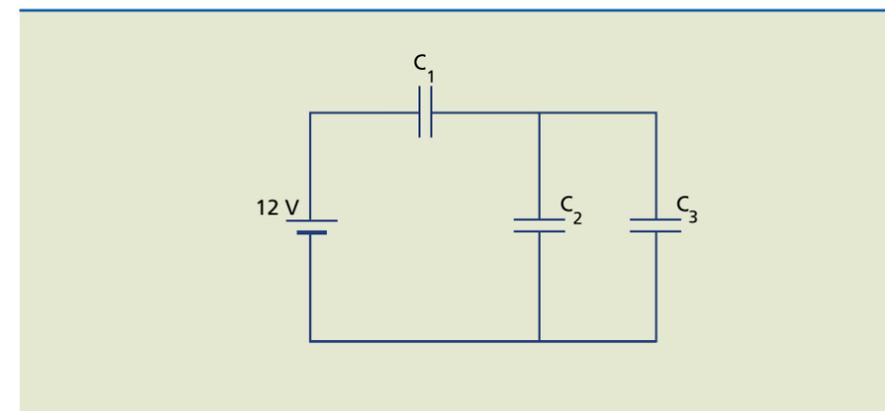
$$C_{eq}V = C_1V + C_2V + \dots + C_nV$$

Dividindo a expressão por V, obtém-se expressão análoga à de resistores em série:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (10.14)$$

### Exemplo

Dados:  $C_1 = 20 \mu F$ ,  $C_2 = 2 \mu F$ ,  $C_3 = 3 \mu F$  (figura 10.17).



**Figura 10.17**

Determine a carga, a tensão e a energia armazenada em cada capacitor.

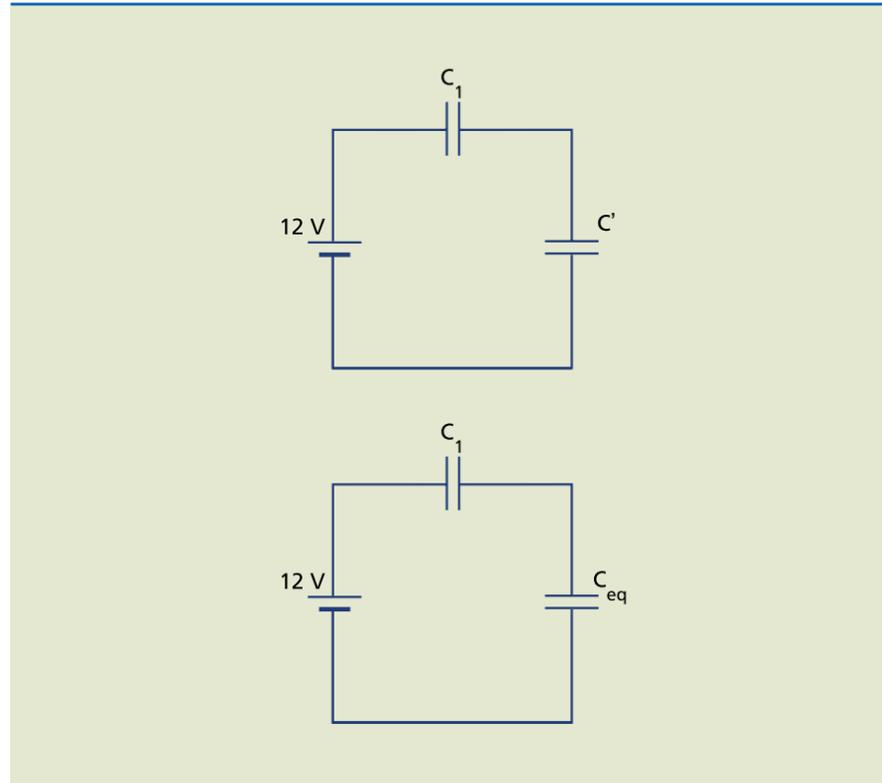


*Solução:*

### Cálculo do capacitor equivalente

Pode reduzir o circuito encontrando o capacitor equivalente  $C'$  aos capacitores  $C_2$  e  $C_3$ , em paralelo. Em seguida, encontra-se o capacitor equivalente ao conjunto  $C_1$  e  $C'$ , em série (figura 10.18).

Figura 10.18



Usando a expressão para capacitores em paralelo, obtém-se o valor de  $C'$ :

$$C' = C_2 + C_3 = 2 + 3 = 5 \text{ mF}$$

Em seguida, usa-se a expressão do capacitor equivalente para dois capacitores em série para determinar  $C_{eq}$ :

$$C_{eq} = \frac{C_1 C'}{C_1 + C'} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4 \mu\text{F}$$

### Cálculo da tensão e da carga em cada capacitor

A carga armazenada em  $C_1$  e  $C'$  é a mesma do capacitor equivalente (circuito em série), ou seja:

$$Q = C_{eq} V = 4 \cdot 12 = 48 \mu\text{C}$$

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{48}{20} = 2,4 \text{ V}$$

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ V}$$

ou:

$$V' = V - V_1 = 12 - 2,4 = 9,6 \text{ V}$$

Como  $V' = V_2 = V_3 = 9,6 \text{ V}$ , temos:

$$Q_2 = C_2 V_2 = 2 \cdot 9,6 = 19,2 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = C_3 V_3 = 3 \cdot 9,6 = 28,8 \mu\text{C}$$

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_3 V_3 = 3 \cdot 9,6 = 28,8 \mu\text{C}$$

ou

$$Q_1 = Q - Q_2 = 48 - 19,2 = 28,8 \mu\text{C}$$

### Cálculo da energia armazenada

$$E_{n1} = \frac{1}{2} Q_1 V_1 = \frac{1}{2} 48 \cdot 2,4 = 5,76 \mu\text{J}$$

$$E_{n2} = \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} 19,2 \cdot 9,6 = 92,16 \mu\text{J}$$

$$E_{n3} = \frac{1}{2} Q_3 V_3 = \frac{1}{2} 28,8 \cdot 9,6 = 138,24 \mu\text{J}$$

## 10.1.6 Regime transitório (capacitor em corrente contínua)

Nos circuitos de corrente contínua puramente resistivos, como a tensão e a corrente permanecem constantes ao longo do tempo, a única variação pode ocorrer quando ligamos ou desligamos o circuito com uma chave ou interruptor, fazendo com que a tensão e a corrente passem, em um intervalo infinitesimal de tempo, de um valor qualquer para zero ou vice-versa.

Nos circuitos em que existem capacitores, isso não acontece, uma vez que, à medida que o capacitor se carrega, o campo elétrico em seu interior se altera. Devido à ação desse campo elétrico, observa-se que a mudança de valores de tensão e corrente se dá de forma gradativa, até que atinjam o valor final, e, a partir daí, permanecem constantes (regime permanente).



Esse fato se verifica tanto quando ligamos como quando desligamos o circuito, e a função matemática que melhor representa tal variação é a exponencial.

O período ou intervalo de tempo em que ocorrem essas variações é denominado regime transitório. Em tal situação, passa-se a representar, com letra minúscula, cada valor obtido para tensão ou corrente de valor instantâneo.

Lembrando que  $i = q/t$  é constante para os circuitos resistivos, uma vez que a velocidade de deslocamento das cargas é constante, nos circuitos com capacitores deve-se escrever:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Como  $q = C \cdot V$  e  $C$  é constante, tem-se:

$$i = \frac{C\Delta V}{\Delta t} \quad (10.15)$$

Nessa expressão,  $\Delta V/\Delta t$  é a variação da tensão em certo intervalo de tempo.

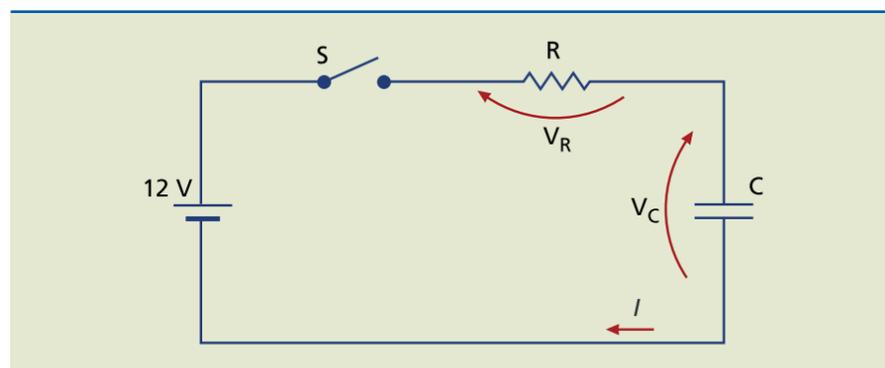
Essa variação no tempo caracteriza o regime transitório, que analisaremos a seguir em um circuito com um único capacitor em corrente contínua.

### Circuito de carga do capacitor

Consideremos o capacitor descarregado da figura 10.19.

**Figura 10.19**

Circuito com capacitor descarregado.



Com o fechamento da chave  $S$ , os valores de tensão e corrente no circuito vão variar segundo uma função exponencial até atingir os valores finais. O tempo necessário para que isso ocorra é proporcional a uma constante, definida como constante de tempo do capacitor e representada por  $\tau$ .

$$\tau = RC$$

em que  $R$  é a resistência de Thévenin do circuito para o capacitor. A unidade de  $\tau$  é o segundo (s).

### Nota

$\tau$  não é o tempo necessário para o capacitor se carregar ou descarregar completamente.

Considerando  $t = 0$  o exato instante do fechamento da chave  $S$ , o capacitor estará totalmente descarregado, comportando-se como curto-circuito. Assim, toda a tensão da fonte estará sobre o resistor, fazendo com que a corrente no circuito seja máxima.

Logo, para  $t = 0$ :

$$i = i_{\text{máx}} = \frac{V}{R}$$

$$V_R = V_{R\text{máx}} = V$$

$$V_C = 0$$

Nos instantes imediatamente após o fechamento da chave, a corrente no circuito diminui de forma gradativa até zero, o mesmo ocorrendo com a tensão no resistor. De outro lado, a tensão no capacitor aumenta até atingir o máximo valor (no exemplo, a própria tensão da fonte), passando a se comportar como um circuito aberto. Pode-se escrever:

$$i = i_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.16)$$

Lembrando que  $V_R = R \cdot I$ , tem-se:

$$V_R = R i_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.17)$$

Para o circuito da figura:

$$V_R = V e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.18)$$

Sendo:

$$V = V_C + V_R \Rightarrow V_C = V - V_R \Rightarrow V_C = V - V e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ou na forma fatorada:

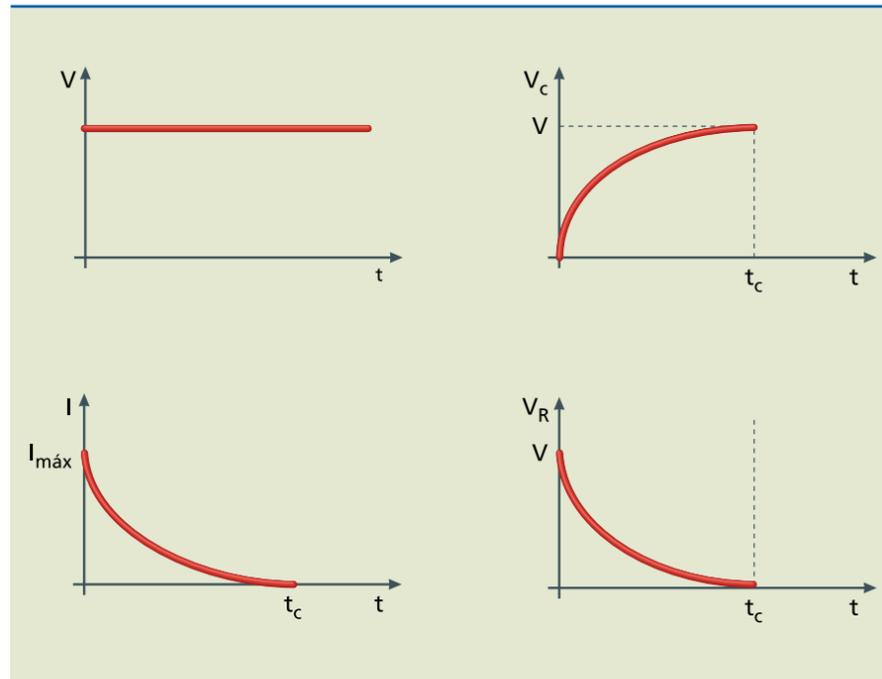
$$V_C = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (10.19)$$

Gráficamente, essas expressões se traduzem em curvas como as exibidas na figura 10.20.



**Figura 10.20**

Varição da tensão e da corrente no circuito de carga de um capacitor:



Vamos analisar matematicamente as expressões: substituindo  $t$  por múltiplos de  $\tau$ , observa-se que, para  $t = 5\tau$ , obtêm-se de modo aproximado os valores finais de tensão e corrente pretendidos. Portanto, é possível afirmar com razoável precisão que o tempo necessário para o capacitor se carregar plenamente é igual a  $5\tau$ , o que pode também ser observado experimentalmente.

Assim:  $t_c =$  tempo de carga do capacitor  $5\tau$ .

#### Nota

Após  $5\tau$ , se não houver alteração no circuito, a tensão permanece indefinidamente no valor máximo e a corrente se mantém nula.

Em resumo:

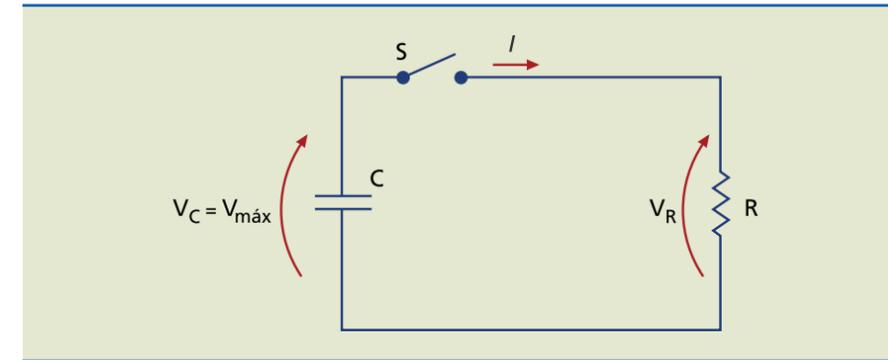
- $t = 0$ : o capacitor está descarregado; comporta-se como curto-circuito.
- $t = 5\tau$ : o capacitor está carregado; comporta-se como circuito aberto.

#### Circuito de descarga do capacitor

Consideremos o capacitor carregado, com tensão entre armaduras  $V_{máx}$ , que pode ou não ser igual à tensão da fonte do circuito de carga visto anteriormente (figura 10.21).

**Figura 10.21**

Circuito com capacitor carregado.



Com o fechamento da chave  $S$ , ocorrerá uma corrente no circuito, devido ao movimento das cargas elétricas de uma armadura para a outra, cessando quando o capacitor se descarrega por completo.

Nessa situação, o capacitor comporta-se como fonte para o circuito.

Considerando  $t = 0$  o exato instante do fechamento da chave  $S$ , tem-se:

$$V_C = V_{máx}$$

$$i = i_{máx} = \frac{V_C}{R} \quad (10.20)$$

$$V_R = V_C = V_{máx} \quad (10.21)$$

Nos instantes imediatamente posteriores ao fechamento da chave  $S$ , a variação da tensão e da corrente no circuito segue uma função exponencial, que também depende da constante de tempo  $\tau$ .

Logo:

$$i = i_{máx} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.22)$$

$$V_C = V_R = Ri \quad (10.23)$$

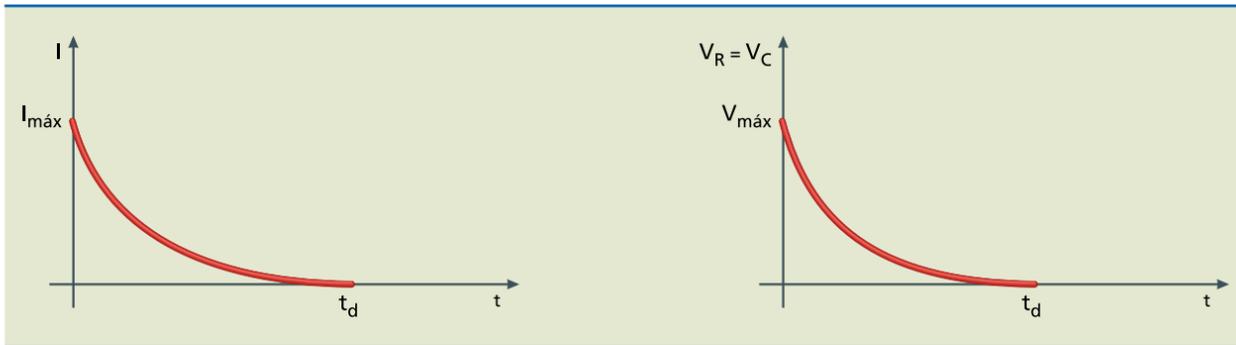
$$V_C = V_R = Ri_{máx} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.24)$$

$$V_C = V_R = V_{máx} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.25)$$

A figura 10.22 mostra graficamente a variação da tensão e da corrente em função do tempo.

Da mesma forma, fazendo a análise matemática das equações, verifica-se que o tempo necessário para a descarga total do capacitor é igual a  $5\tau$  (observado experimentalmente).





**Figura 10.22**

Varição da corrente e da tensão no circuito de descarga de um capacitor:

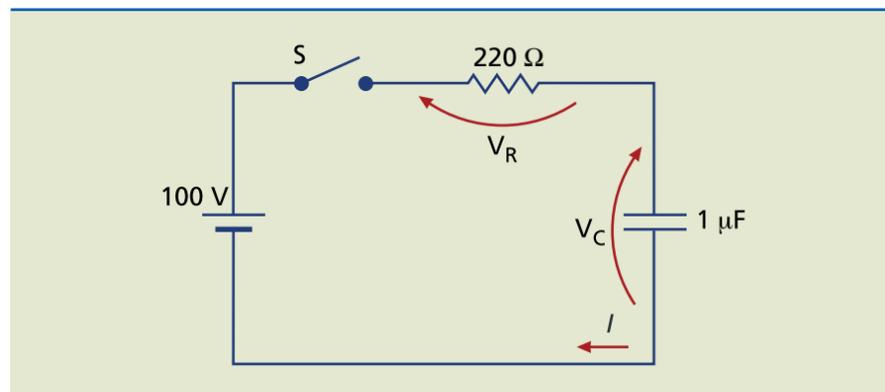
Assim:  $t_d = \text{tempo de descarga} = 5\tau$ .

**Exemplo**

Para o circuito da figura 10.23, determine:

- a) as equações de  $i(t)$ ,  $V_R(t)$  e  $V_C(t)$ ;
- b) os valores de  $I$ ,  $V_R$  e  $V_C$  para os instantes  $t_1 = 1 \text{ ms}$  e  $t_2 = 2 \text{ ms}$ ;
- c) o tempo necessário para que o capacitor atinja 50 V;
- d) os gráficos de  $i(t)$ ,  $V_R(t)$  e  $V_C(t)$ , destacando os instantes  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau$  e  $5\tau$ .

**Figura 10.23**



*Solução:*

a)  $\tau = RC \Rightarrow \tau = 220 \cdot 1 \text{ } \Omega \cdot \mu\text{F} = 220 \text{ ms}$

$$i(t) = i_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = \frac{100}{220} e^{-\frac{t}{220}} \cong 0,45 e^{-\frac{t}{220}}$$

$$V_R(t) = V e^{-\frac{t}{\tau}} = 100 e^{-\frac{t}{220}}$$

$$V_C(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 100(1 - e^{-\frac{t}{220}})$$

b) Com as expressões obtidas, temos para  $t_1 = 1 \text{ ms}$ :

$$i(1) = 0,45 e^{-\frac{1}{220}} = 4,76 \text{ mA}$$

$$V_R(1) = 100 e^{-\frac{1}{220}} \cong 1,04 \text{ V}$$

ou

$$V_R(1) = Ri(1) = 220 \cdot 4,76 \cong 1,04 \text{ V}$$

$$V_C(1) = 100(1 - e^{-\frac{1}{220}}) = 98,96 \text{ V}$$

ou

$$V_C(1) = V - V_R(1) = 100 - 1,04 = 98,96 \text{ V}$$

Observe que nessas operações as unidades foram convertidas para seus múltiplos.

Para  $t_2 = 2 \text{ ms}$ :

$$t_1 > 5\tau = 5 \cdot 220 = 1,1 \text{ ms}$$

O capacitor já está completamente carregado, logo:

$$V_C(2) = 100 \text{ V}$$

$$V_R(2) = 0 \text{ e } i(2) = 0$$

$$V_C(t) = 50 \text{ V}$$

c)  $50 = 100(1 - e^{-\frac{t}{220\mu}}) \Rightarrow 0,5 = 1 - e^{-\frac{t}{220\mu}} \Rightarrow -0,5 = -e^{-\frac{t}{220\mu}}$

Aplicando o **logaritmo neperiano** ( $\ln$ ) aos dois termos da igualdade, temos:

$$\ln(0,5) = \ln e^{-\frac{t}{220}}$$

$$-0,6931 = \frac{-t}{220} \Rightarrow t = 152,5 \mu\text{s}$$

d) Para construirmos os gráficos, devemos determinar a corrente e as tensões para os diversos valores de  $t$  (tabela 10.5).

O **logaritmo neperiano**, de base  $e$ , em que  $e \approx 2,718281828459045$  (número de Euler), é também chamado **logaritmo natural**.



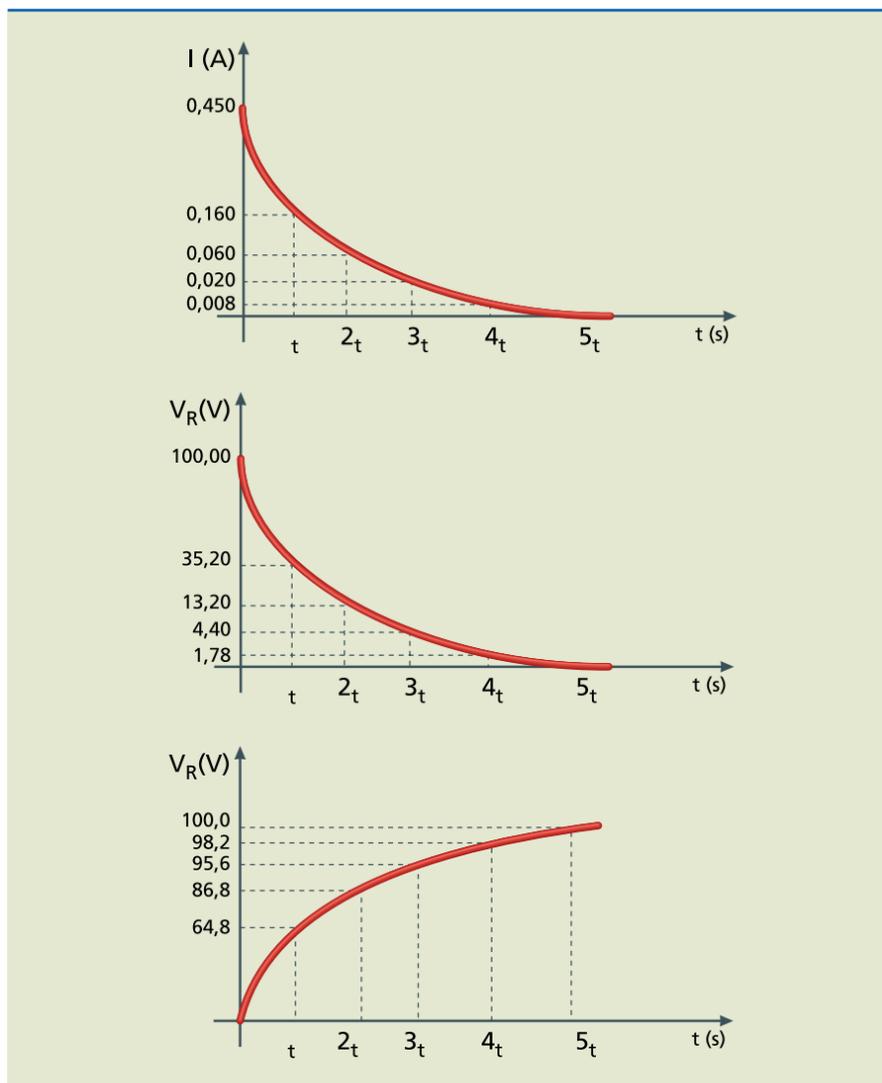
**Tabela 10.5**

Corrente e tensões nos diversos instantes

	$i(t) = 0,45e^{-\frac{t}{\tau}}$	$V_R(t) = 100e^{-\frac{t}{\tau}}$	$V_C(t) = 100(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
$t = 0$	$i(0) = 0,45 \text{ A}$	$V_R(0) = 100 \text{ V}$	$V_C(0) = 0$
$t = \tau$	$i(\tau) = 0,16 \text{ A}$	$V_R(\tau) = 35,3 \text{ V}$	$V_C(\tau) = 64,8 \text{ V}$
$t = 2\tau$	$i(2\tau) = 0,06 \text{ A}$	$V_R(2\tau) = 13,2 \text{ V}$	$V_C(2\tau) = 86,8 \text{ V}$
$t = 3\tau$	$i(3\tau) = 0,02 \text{ A}$	$V_R(3\tau) = 4,4 \text{ V}$	$V_C(3\tau) = 95,6 \text{ V}$
$t = 4\tau$	$i(4\tau) = 0,008 \text{ A}$	$V_R(4\tau) = 1,76 \text{ V}$	$V_C(4\tau) = 98,24 \text{ V}$
$t = 5\tau$	$i(5\tau) = 0,0003 \text{ A} \approx 0 \text{ A}$	$V_R(5\tau) \approx 0 \text{ V}$	$V_C(5\tau) = 100 \text{ V}$

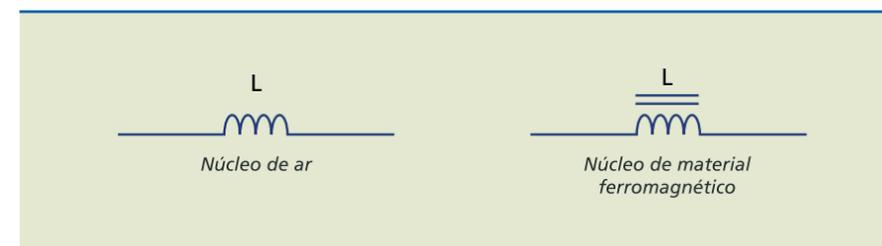
Podemos, então, montar os gráficos (figura 10.24).

**Figura 10.24**



## 10.2 Indutores

São dispositivos constituídos de espiras ou fios enrolados sobre um núcleo (bobinas) que têm por finalidade armazenar energia potencial elétrica com a criação de um campo magnético. Sua representação em circuitos elétricos é ilustrada na figura 10.25.

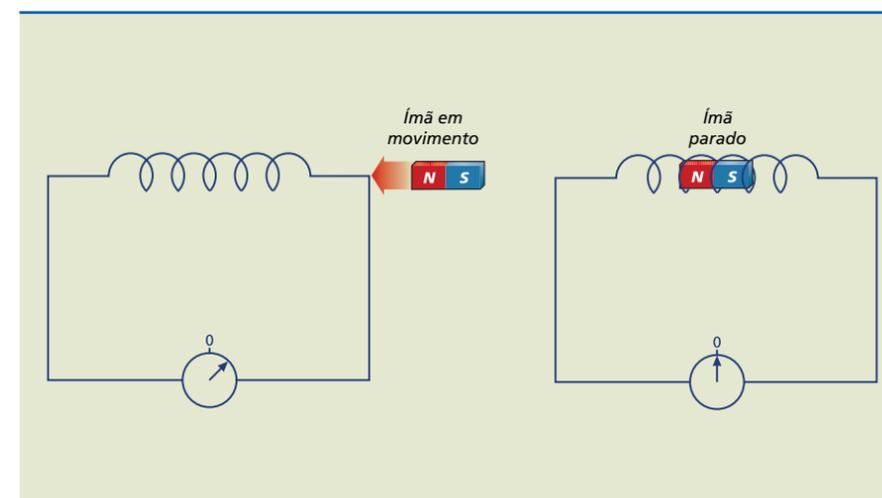


**Figura 10.25**

Simbologias do indutor.

### 10.2.1 Princípio de funcionamento

Vamos analisar um indutor desenergizado, ligado apenas a um amperímetro muito sensível (galvanômetro) de zero central (permitindo o deslocamento do ponteiro nos dois sentidos), sem qualquer tipo de gerador ligado ao indutor (figura 10.26).



**Figura 10.26**

Indutor submetido ao campo magnético de um ímã em movimento e parado.

Movimentando o ímã nas proximidades do indutor, o galvanômetro indica a existência de corrente elétrica no circuito, pelo deslocamento do ponteiro. Se o movimento do ímã cessar (com o ímã no interior do indutor ou em uma posição qualquer), a indicação do amperímetro passa a ser zero, ou seja, deixa de existir corrente elétrica no circuito.

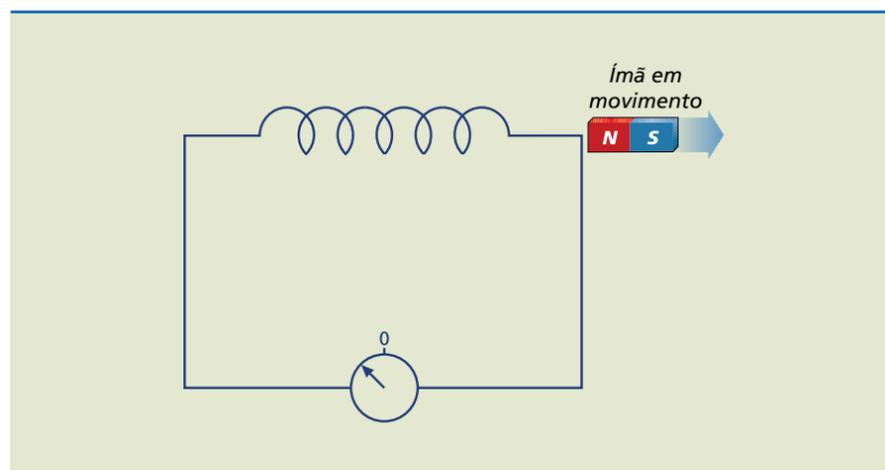
Considerando o ímã parado no centro do indutor, se o retirarmos, por exemplo, pelo mesmo lado pelo qual foi introduzido (figura 10.27), o amperímetro registra novamente a existência de corrente elétrica no circuito, só que dessa vez o movimento do ponteiro se dá em sentido contrário ao anterior, indicando que a corrente elétrica possui sentido oposto ao da primeira.



É comum, em vez de trabalhar com o campo magnético, utilizar o fluxo magnético ( $\Phi$ ), que está relacionado às linhas de força magnética existentes. No SI, a unidade de fluxo é o weber (Wb), em homenagem ao físico alemão Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

**Figura 10.27**

Ao retirar o ímã de dentro do indutor, surge uma corrente elétrica de sentido contrário ao do movimento de entrada.



Pode-se então concluir que o indutor reage a toda e qualquer variação do fluxo magnético em seu interior, “produzindo” uma tensão e corrente elétrica (induzidas). O sentido em que ambas se estabelecem é tal que elas se opõem à variação do fluxo. Isso pode ser explicado pela ação do campo magnético do ímã sobre as partículas no interior do condutor (fio), na forma de força magnética.

O parâmetro que relaciona o campo magnético com a corrente induzida é denominado indutância ( $L$ ), obtido pela expressão:

$$e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (10.26)$$

em que:

- $e$  é a tensão induzida nos terminais do indutor, em volt;
- $\Delta i$  a variação da corrente elétrica, em ampère;
- $\Delta t$  o intervalo de tempo em que ocorre  $\Delta i$ , em segundo;
- $L$  a indutância, cuja unidade é o **henry** (H).

Em homenagem ao físico americano Joseph Henry (1797–1878).

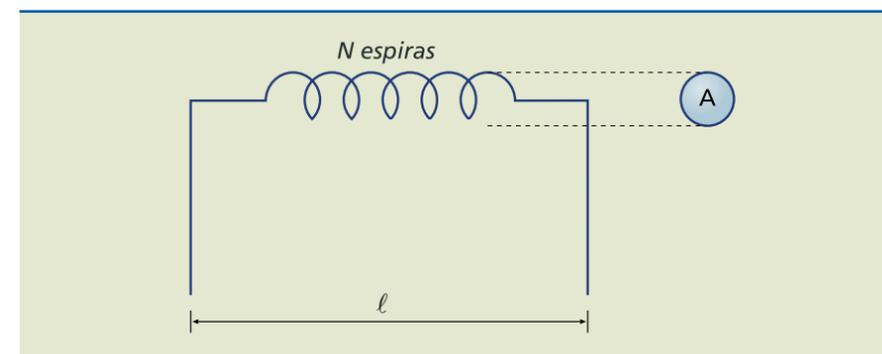
### 10.3 Energia armazenada no indutor

A energia (em joule) no indutor é armazenada no campo magnético que o envolve e determinada pela expressão:

$$E_n = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad (10.27)$$

#### 10.3.1 Indutor de uma só camada

Consideremos um indutor com uma única camada de espiras, com área  $A$  (em metro quadrado), sem núcleo e imerso no vácuo (figura 10.28). O indutor possui  $N$  espiras e comprimento  $\ell$  (em metro).



**Figura 10.28**

Indutor com  $N$  espiras de seção transversal de área  $A$  e comprimento  $\ell$ .

A indutância desse indutor, de maneira aproximada, é determinada pela expressão:

$$L_0 = \frac{N^2 \mu_0 A}{\ell} \quad (10.28)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, que no SI vale:

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ (H/m)}$$

#### Nota

A fórmula de indutância apresentada anteriormente torna-se mais precisa quanto maior for o comprimento do indutor em relação ao diâmetro da espira.

A inclusão, no interior do indutor, de um núcleo de material ferromagnético provoca nessa região aumento no fluxo magnético ( $\Phi$ ), devido às características magnéticas do material, resultando em maior concentração das linhas de campo magnético.

Essa propriedade do material de intensificar o fluxo magnético é definida como sua permeabilidade magnética ( $\mu$ ), que se relaciona à permeabilidade magnética do vácuo ( $\mu_0$ ) por meio da permeabilidade relativa ( $\mu_r$ ), em que:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \text{ ou } \mu = \mu_r \mu_0 \quad (10.29)$$



A tabela 10.6 apresenta a permeabilidade relativa de diferentes materiais.

**Tabela 10.6**  
Permeabilidade relativa de alguns materiais

Material	Permeabilidade relativa ( $\mu_r$ )
Ar	~1
Ferro	6000 a 8000
Níquel	400 a 1000
Permalói (21,5% Fe, 78,5% Ni)	~80000

Desse modo, para um indutor com núcleo qualquer com N espiras, área A e comprimento  $\ell$ , pode-se escrever:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{\ell} \text{ ou } L = \frac{\mu_0 N^2 \mu A}{\ell} \text{ ou ainda } L = \mu_r L_0 \quad (10.30)$$

**Exemplo**

Determine a indutância de uma bobina com 30 espiras, de área 1 cm<sup>2</sup>. O comprimento da bobina é de 1,5 cm.

*Solução:*

a) Núcleo: vácuo ou ar

$$L_0 = \frac{N^2 \mu_0 A}{\ell} = \frac{30^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{1,5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow L_0 = 2,4 \mu\text{H}$$

b) Núcleo: ferro ( $\mu_r = 7000$ )

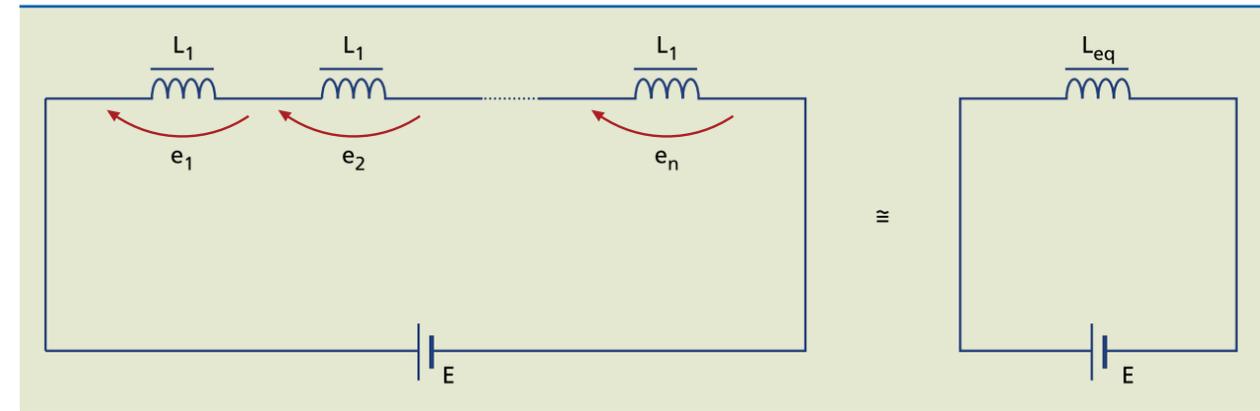
$$L = \mu_r \cdot L_0 = 7000 \cdot 2,4 \cdot 10^{-6} \Rightarrow L = 16,8 \text{ mH}$$

**10.3.2 Associação de indutores**

Consiste na determinação de um único indutor que represente numericamente a associação de um grupo de indutores ligados de maneira qualquer em um circuito. Esse indutor é denominado indutor equivalente ( $L_{eq}$ ).

**Associação em série**

Consideremos que no circuito em série da figura 10.29 ocorra uma variação de corrente  $\Delta i$ , durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ .



**Figura 10.29**  
Circuito de indutores em série e indutor equivalente.

Nesse circuito:

$$E = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

Como  $E = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$ , então:

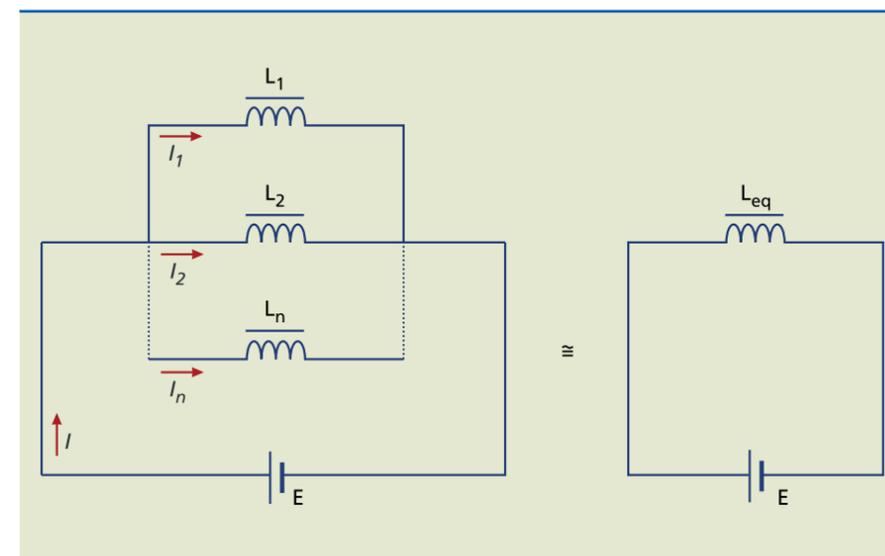
$$-L_{eq} \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta i}{\Delta t} + \left(-L_2 \frac{\Delta i}{\Delta t}\right) + \dots + \left(-L_n \frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$$

Uma vez que se trata de uma razão constante, pode-se dividir a expressão por  $-\Delta i/\Delta t$ , obtendo expressão análoga à associação de resistências em série:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (10.31)$$

**Associação em paralelo**

Consideremos o circuito da figura 10.30.



**Figura 10.30**  
Associação de indutores em paralelo e indutor equivalente.



Nesse caso, ocorrendo uma variação na corrente total do circuito, esta se propagará nas demais correntes dos ramos do circuito, de modo proporcional a cada indutância.

$$E = \text{constante}$$

$$\Delta i = \Delta i_1 + \Delta i_2 + \dots + \Delta i_n,$$

Como  $\Delta i = -\frac{E}{L} \Delta t$ , então:

$$-\frac{E}{L_{eq}} \Delta t = \left(-\frac{E}{L_1} \Delta t\right) + \left(-\frac{E}{L_2} \Delta t\right) + \dots + \left(-\frac{E}{L_n} \Delta t\right)$$

Uma vez que  $E$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$  são constantes, pode-se dividir a expressão por  $-E \cdot \Delta t$ , obtendo expressão análoga à associação de resistências em paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (10.32)$$

**Casos particulares**

a) Dois indutores diferentes em paralelo:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (10.33)$$

b)  $n$  indutores iguais em paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} + \dots + \frac{1}{L}$$

$$L_{eq} = \frac{L}{n} \quad (10.34)$$

**Exemplo**

Determine a indutância equivalente da associação da figura 10.31.

Dados:  $L_1 = 1 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 4 \text{ mH}$ ,  $L_3 = 20 \text{ mH}$ .

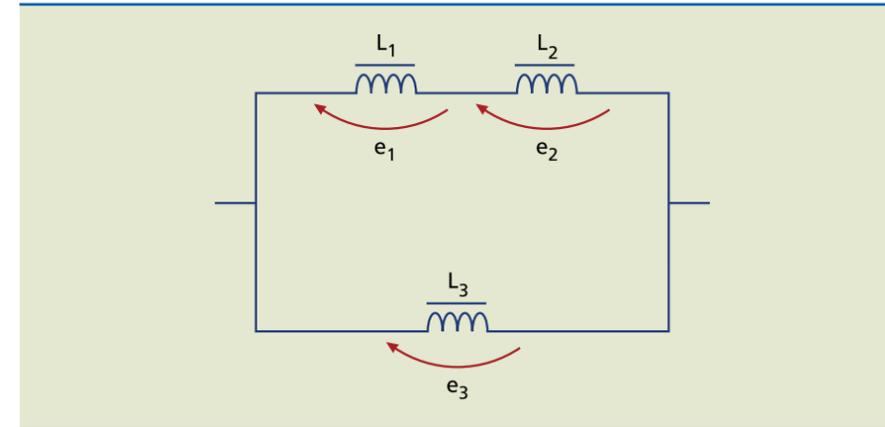


Figura 10.31

*Solução:*

Determinamos inicialmente a indutância equivalente  $L_{12}$  dos indutores  $L_1$  e  $L_2$ , que estão em série, e depois a indutância equivalente entre  $L_{12}$  e  $L_3$ , que estão em paralelo (figura 10.32).

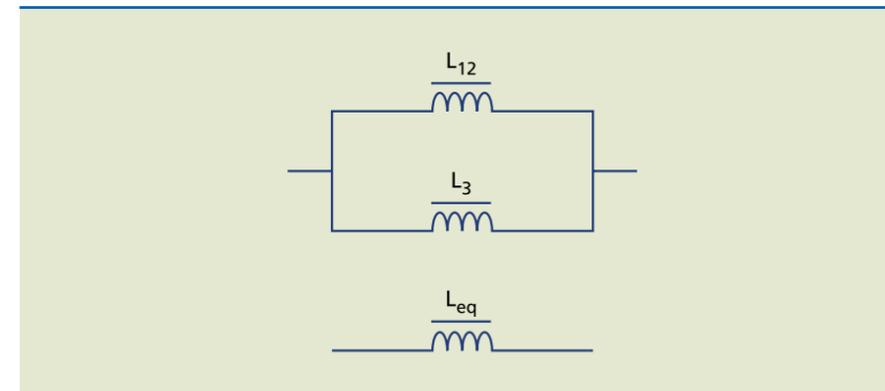


Figura 10.32

$$L_{12} = L_1 + L_2 = 1 + 4 = 5 \text{ mH}$$

$$L_{eq} = \frac{L_{12} L_3}{L_{12} + L_3} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ mH}$$

**10.3.3 Regime transitório (indutor em corrente contínua)**

De maneira análoga aos capacitores, para circuitos em corrente contínua que possuem indutores, ocorrerá o regime transitório (variação gradativa da tensão e corrente no circuito, até atingir os valores definitivos: regime permanente). Nesse caso, a existência do regime transitório se dá devido à ação do campo magnético no indutor, conforme o circuito é ligado ou desligado.

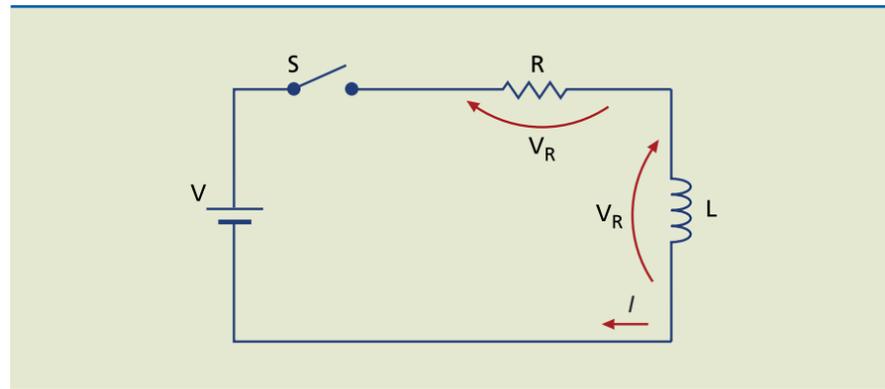
Cabe ressaltar que o indutor reage a toda e qualquer variação do campo magnético em seu interior. A função matemática que melhor representa a variação ocorrida no regime transitório é a exponencial.



Passemos à análise do regime transitório de um circuito com um único indutor, na fase de energização do indutor (figura 10.33).

**Figura 10.33**

Circuito de energização de um indutor:



Consideremos o indutor inicialmente desenergizado. Com o fechamento da chave **S**, os valores de tensão e corrente nos componentes do circuito vão variar segundo uma função exponencial até atingir os valores finais. Da mesma forma que ocorre com os capacitores, o tempo necessário para que isso aconteça é proporcional a uma constante de tempo do indutor, também representada por  $\tau_L$  e medida em segundo, expressa por:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (10.35)$$

em que **R** é a resistência elétrica (resistência de Thévenin) vista do indutor.

**Nota**

Também para o indutor,  $\tau_L$  não é o tempo total necessário para energizar ou desenergizar o indutor por completo.

Considerando  $t = 0$  o exato instante do fechamento da chave **S**, o indutor da figura 10.33 está totalmente desenergizado (sem corrente elétrica e sem campo magnético em seu interior), reagindo à variação da corrente elétrica que se impõe ao circuito e, portanto, comportando-se como circuito aberto. Assim, a corrente no circuito é nula e toda a tensão da fonte é aplicada sobre o próprio indutor. Logo, para  $t = 0$ :

$$V_R = 0$$

$$i = 0$$

$$V_L = V_{L\text{máx}}$$

Nos instantes sucessivos, há aumento gradativo (exponencial) na corrente do circuito e conseqüente aumento na tensão do resistor até atingir a tensão **V** da fonte. De outro lado, a tensão do indutor vai diminuindo até cair a zero, e o indutor passa a se comportar como curto-circuito.

Para essa situação, pode-se escrever:

$$V_L = V_{L\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_L = V e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Como:

$$V_R = V - V_L \Rightarrow V_R = V - V e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_R = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (10.36)$$

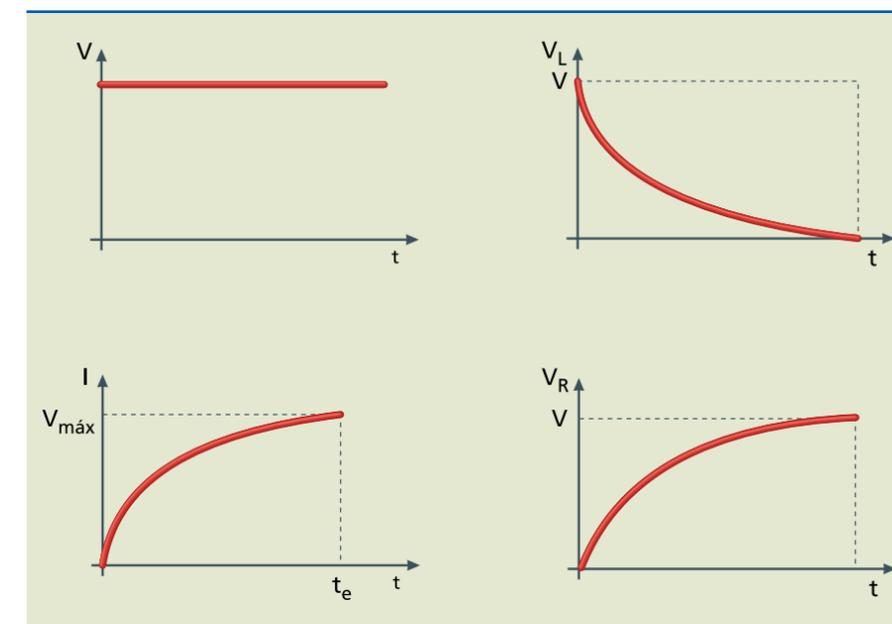
Sendo:

$$i = \frac{V}{R}$$

temos:

$$i = \frac{V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{R} \Rightarrow i = i_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.37)$$

Os gráficos da figura 10.34 mostram o comportamento da tensão e da corrente em função do tempo.



**Figura 10.34**

Comportamento da tensão e da corrente em um indutor inicialmente desenergizado.

Vamos analisar matematicamente as expressões: substituindo **t** por múltiplos de  $\tau_L$ , observa-se que, para  $t = 5\tau_L$ , obtêm-se de modo aproximado os valores



finais de tensão e corrente pretendidos. Portanto, é possível afirmar que o tempo necessário para o indutor se energizar plenamente é igual a  $5\tau_L$ , o que pode também ser observado experimentalmente.

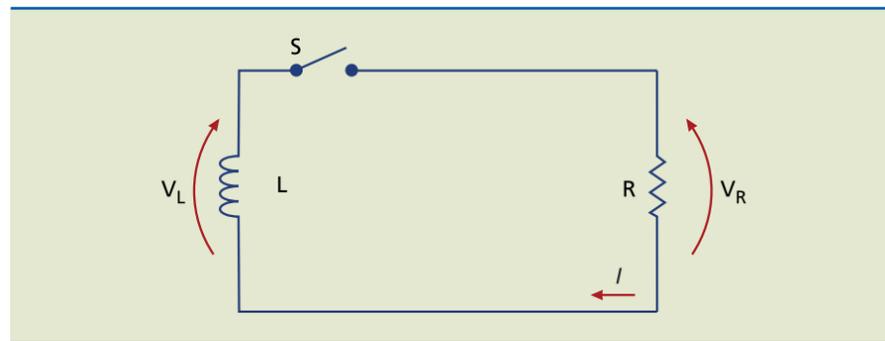
Em resumo:

- $t = 0$ : o indutor está desenergizado; comporta-se como circuito aberto.
- $t = 5\tau_L$ : o indutor está energizado; comporta-se como curto-circuito.

**Circuito para energizar o indutor**

Consideremos o indutor energizado, com corrente  $i_{m\acute{a}x}$ , que pode ou não ser a máxima corrente determinada no circuito de energização (figura 10.35).

**Figura 10.35**  
Circuito com indutor inicialmente energizado.



Com o fechamento da chave **S**, o indutor passa a se comportar como fonte de corrente para o circuito, fornecendo corrente à resistência **R** e dando origem à tensão  $V_R$ , a partir de um valor máximo e decrescendo exponencialmente até zero.

Considerando  $t = 0$  o exato instante do fechamento da chave **S**, tem-se:

$$i = i_{m\acute{a}x}$$

$$V_R = V_{Rm\acute{a}x} = Ri_{m\acute{a}x}$$

$$V_L = V_R = V_{Rm\acute{a}x} = Ri_{m\acute{a}x}$$

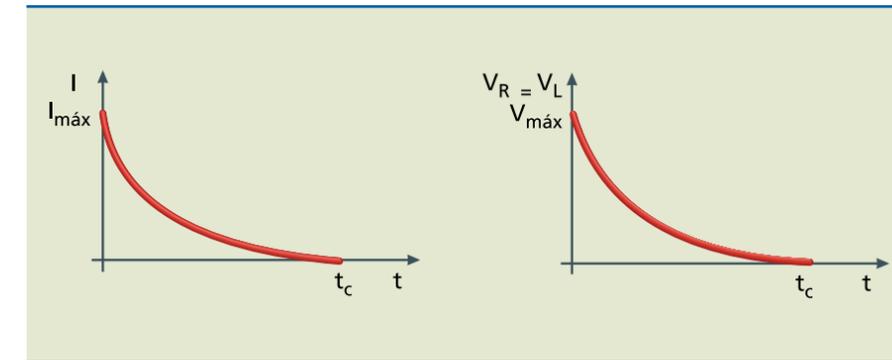
Nos instantes imediatamente posteriores ao fechamento da chave **S**, a variação da tensão e da corrente no circuito segue uma função exponencial, que depende da constante de tempo  $\tau_L$  do indutor. Logo:

$$i = i_{m\acute{a}x} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Portanto:

$$V_R = V_L = V_{m\acute{a}x} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A figura 10.36 mostra graficamente a variação da corrente e da tensão em função do tempo.



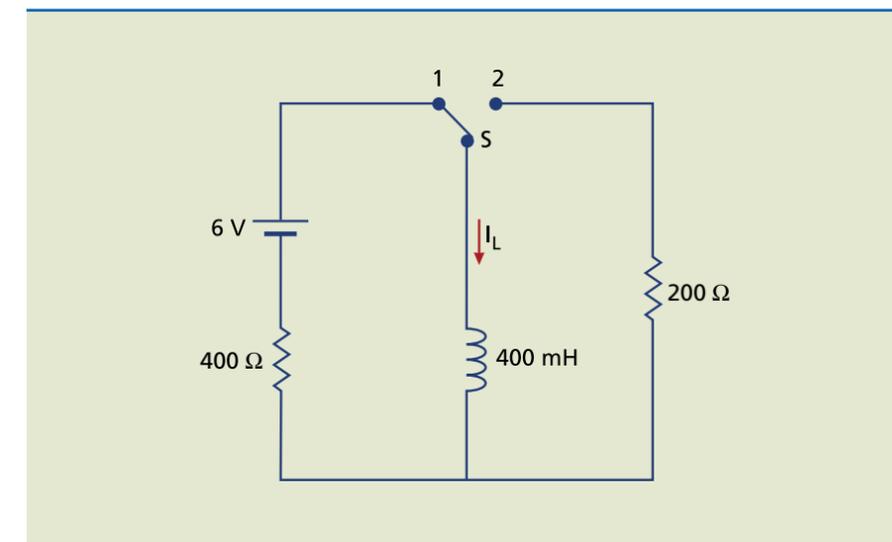
**Figura 10.36**  
Variação da tensão e da corrente em circuito com indutor energizado.

Da mesma forma, fazendo a análise matemática das equações, verifica-se que o tempo gasto para desenergizar totalmente o indutor é igual a  $5\tau$  (observado experimentalmente).

Assim:  $t_d = \text{tempo de desenergização} = 5\tau$

**Exemplo**

Determine o gráfico de  $i(t)$  para o circuito da figura 10.37, no intervalo de 0 a 6 ms, destacando os pontos de 1 em 1 milissegundo. Sabe-se que a chave **S** é colocada na posição 1 em  $t = 0$ , permanecendo durante 3 ms nessa posição antes de passar para a posição 2, onde se mantém indefinidamente. Considere que o indutor está desenergizado no início.



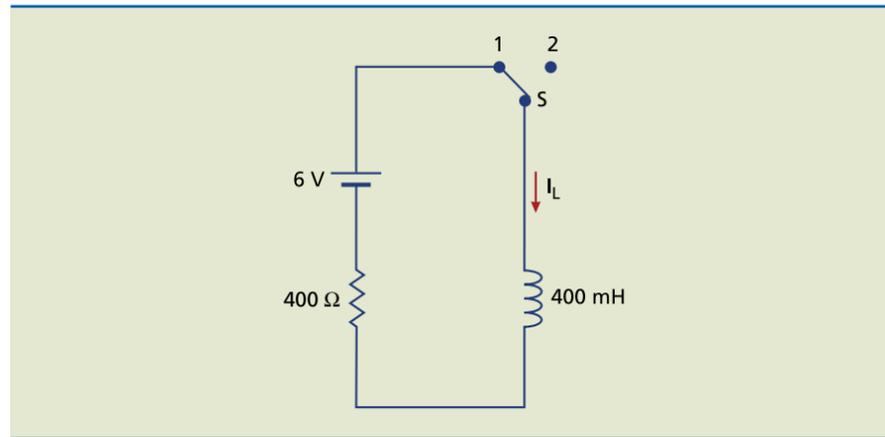
**Figura 10.37**

*Solução:*

De 0 a 3 ms (figura 10.38): chave na posição 1 (circuito para energizar o indutor).



Figura 10.38



$$\tau_{L1} = \frac{L}{R_1} = \frac{400 \text{ mH}}{400 \text{ } \Omega} = 1 \text{ ms}$$

$$i_{L\text{máx}} = \frac{E}{R} = \frac{6 \text{ V}}{400 \text{ } \Omega} = 15 \text{ mA}$$

$$i_L(t) = i_{L\text{máx}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 15 \cdot 10^{-3}(1 - e^{-\frac{t}{1}})$$

Note que, na última expressão e nas seguintes,  $t$  e  $\tau$  estão expressos na mesma unidade (ms).

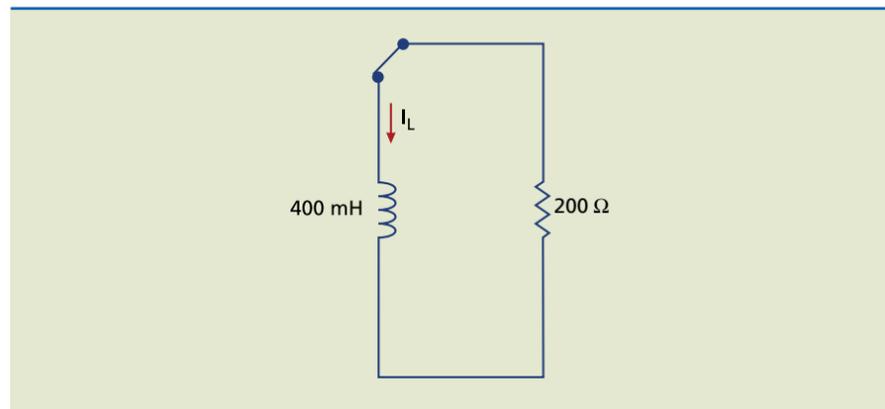
Para  $t = 1 \text{ ms} \Rightarrow i_L(1) = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-1/1}) \Rightarrow i_L(1) = 9,48 \text{ mA}$

Para  $t = 2 \text{ ms} \Rightarrow i_L(2) = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-2}) \Rightarrow i_L(2) = 12,97 \text{ mA}$

Para  $t = 3 \text{ ms} \Rightarrow i_L(3) = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-3/1}) \Rightarrow i_L(3) = 14,25 \text{ mA}$

De 3 ms em diante (figura 10.39): chave na posição 2 (circuito para desenergizar o indutor).

Figura 10.39



$$\tau_{L2} = \frac{L}{R_2} = \frac{400 \text{ mH}}{200 \text{ } \Omega} = 2 \text{ ms}$$

$$i_L(t) = i_{L\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}} = 14,25 e^{-\frac{-(t-3)}{2}} = 14,25 e^{-\frac{(3-t)}{2}}$$

Para  $t = 3 \text{ ms} \Rightarrow i_L(3) = 14,25 \text{ mA}$

Esse é o valor com que o indutor se energiza no último instante da chave na posição 1.

Para  $t = 4 \text{ ms} \Rightarrow i_L(4) = 14,25 e^{-\frac{3-4}{2}} = 8,64 \text{ mA}$

Para  $t = 5 \text{ ms} \Rightarrow i_L(5) = 14,25 e^{-\frac{3-5}{2}} = 5,94 \text{ mA}$

Para  $t = 6 \text{ ms} \Rightarrow i_L(6) = 14,25 e^{-\frac{3-6}{2}} = 3,18 \text{ mA}$

Com esses dados, pode-se construir o gráfico da variação da corrente em função do tempo (figura 10.40).



Figura 10.40



# Capítulo I I

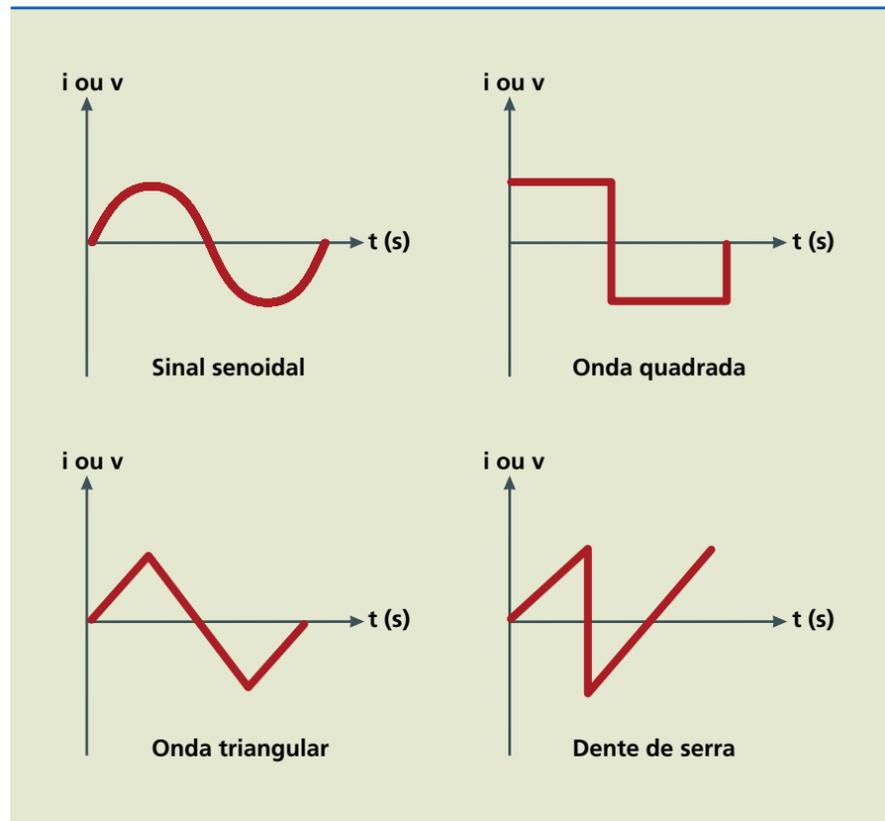
## Corrente alternada



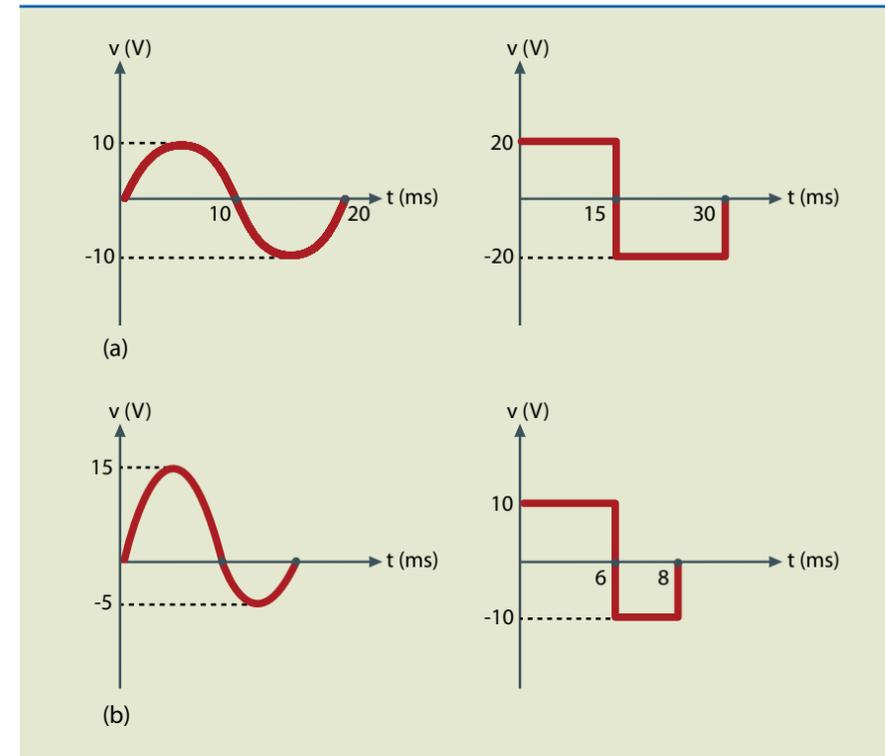
**E**m princípio, pode-se descrever um sinal (tensão ou corrente) alternado como aquele cujo sentido de movimento ou cuja amplitude mudam periodicamente. Os sinais alternados (CA) recebem nomes específicos, de acordo com a forma de seu gráfico em função do tempo (figura 11.1).

**Figura 11.1**

Gráficos da variação de sinais alternados em função do tempo.



Com exceção do sinal alternado do tipo senoidal, os demais, em sua maioria, são obtidos como resultado de circuitos eletrônicos. O sinal alternado pode ser simétrico ou assimétrico (tanto em relação à amplitude como em relação ao eixo do tempo), dependendo de diversos fatores, como influência de componentes contínuos, circuitos ou componentes eletrônicos (figura 11.2).



**Figura 11.2**

(a) Sinais simétricos e (b) sinais assimétricos.

O sinal alternado mais conhecido é o do tipo senoidal, como o que é fornecido às residências pelas concessionárias de energia, conduzido por redes de transmissão e distribuição (figura 11.3).



**Figura 11.3**

Torres de transmissão de energia elétrica.



## 11.1 Noções básicas

Para entendermos como se produz uma corrente alternada, vamos considerar um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Suponhamos que uma espira condutora simples, de área  $A$ , esteja mergulhada nesse campo (figura 11.4). Por um mecanismo qualquer, essa espira executa um movimento de rotação com velocidade angular  $\omega$  constante, em torno de um eixo. Vamos considerar, ainda, que, nesse movimento, as linhas de campo formem um ângulo  $\theta$  com a normal ao plano da espira e que, no instante  $t = 0$ , a espira esteja perpendicular a essas linhas de campo, ou seja, nesse instante inicial  $\theta = 0$ .

O fluxo do campo magnético por essa espira é dado por:

$$F = B \cdot A \cdot \cos \theta \quad (11.1)$$

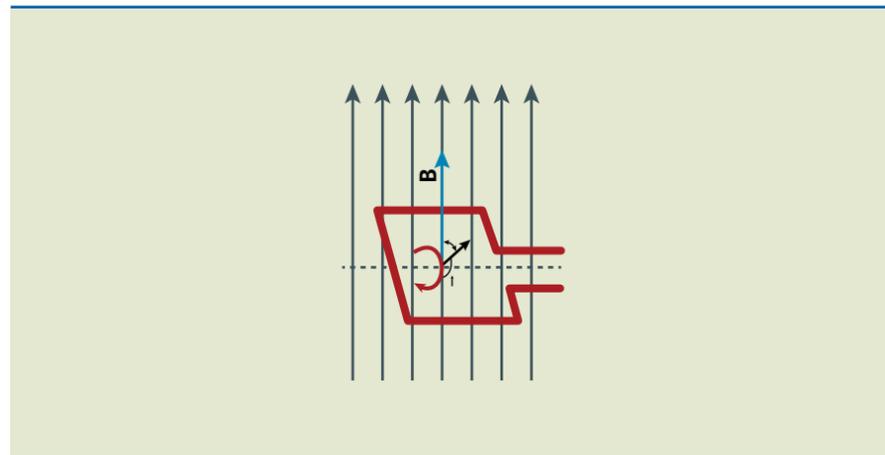
que exprime a quantidade de linhas de força do campo que atravessam a área  $A$ .

À medida que a espira gira, o ângulo  $\theta$  muda e, portanto, varia o fluxo do campo magnético pela espira. Na condição inicial ( $t = 0$ ,  $\theta = 0$ ),  $\cos \theta = 1$  e o fluxo do campo pela área  $A$  tem valor máximo:

$$\Phi_{\text{máx}} = B \cdot A \quad (11.2)$$

**Figura 11.4**

Espira de área  $A$  imersa em campo magnético de intensidade  $B$ .



Em um instante  $t$  posterior, a espira terá se deslocado, em seu movimento de rotação de certo ângulo  $\theta$ , cujo valor é igual ao produto  $\omega t$ , ou seja:

$$\theta(t) = \omega t \quad (11.3)$$

Considerando as equações 11.1, 11.2 e 11.3, pode-se escrever:

$$\Phi = \Phi_{\text{máx}} \cos \theta \Rightarrow \Phi = \Phi_{\text{máx}} \cos \omega t \quad (11.4)$$

Em uma volta completa da espira, os casos particulares dessa equação ocorrem quando:

a)  $\cos \omega t = 0$

O ângulo  $\omega t$  é igual a  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ , que equivalem a  $\pi/2$  ou  $3\pi/2$  em radianos, unidade utilizada em boa parte deste estudo

Assim:

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \text{ rad ou } \omega t = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Isso ocorre nos instantes (em segundo):

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \text{ s e } t = \frac{3\pi}{2\omega} \text{ s}$$

b)  $\cos \omega t = 1$

O ângulo  $\omega t$  é igual a  $0^\circ$ ,  $\pi$  ou  $2\pi$ , que ocorre nos instantes:

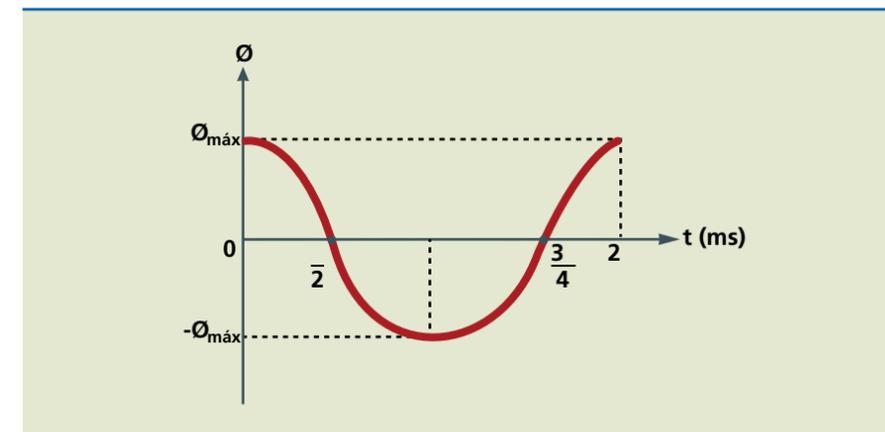
$$t = 0 \text{ s e } t = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s}$$

c)  $\cos \omega t = -1$

O ângulo  $\omega t$  é igual a  $\pi$ , que ocorre no instante:

$$t = \frac{\pi}{\omega} \text{ s}$$

A figura 11.5 mostra o gráfico dessa equação, salientando esses instantes.



**Figura 11.5**

Varição do fluxo do campo magnético através de uma espira em função do tempo.

Como a velocidade de rotação é constante, o movimento da espira é periódico, ou seja, a espira completa uma volta em intervalos de tempo iguais. O tempo para a espira realizar uma volta completa é chamado período de rotação, designado por  $T$ .



Em consequência da variação do fluxo, surge nos terminais da espira uma tensão elétrica induzida  $e$ , que, segundo a lei de Faraday-Lenz, é proporcional à variação do fluxo  $\Delta\Phi$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , expressa por:

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (11.5)$$

em que o sinal negativo (-) indica que o sentido da tensão é contrário ao da variação do fluxo.

Demonstra-se matematicamente que a expressão para a tensão induzida em cada instante nessa espira é dada por:

$$e = \Phi_{\text{máx}} \omega \text{sen}\omega t \quad (11.6)$$

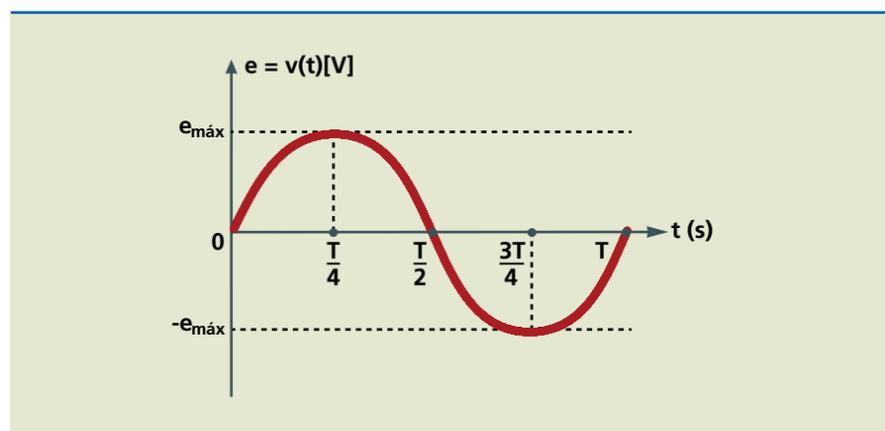
Como  $e_{\text{máx}} = \Phi_{\text{máx}}\omega$ , pode-se reescrever a equação 11.6:

$$e = e_{\text{máx}} \text{sen}\omega t \quad (11.7)$$

cujo gráfico é representado na figura 11.6.

**Figura 11.6**

Varição da tensão em função do tempo.



De maneira análoga, é possível representar matematicamente uma tensão alternada por:

$$v(t) = v_{\text{máx}} \text{sen}\omega t \quad (11.8)$$

também conhecida como equação do sinal alternado no domínio do tempo.

A velocidade angular se relaciona com o período  $T$  (e a frequência) segundo a expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f \quad [\text{rad/s}] \quad (11.9)$$

em que:

- $T$  é o período do sinal alternado, em segundo; corresponde ao tempo gasto para uma volta completa da espira ou, ainda, ao tempo necessário para a realização de um ciclo completo do sinal alternado (CA);
- $f$  a frequência do sinal alternado, em hertz; corresponde ao número de ciclos do sinal alternado que ocorrem a cada segundo, dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad (11.10)$$

A expressão 11.10 indica que frequência e período são inversamente proporcionais, ou seja, quanto maior o período, menor a frequência e vice-versa.

No Brasil, a frequência adotada é de 60 Hz; portanto, cada ciclo dura aproximadamente:

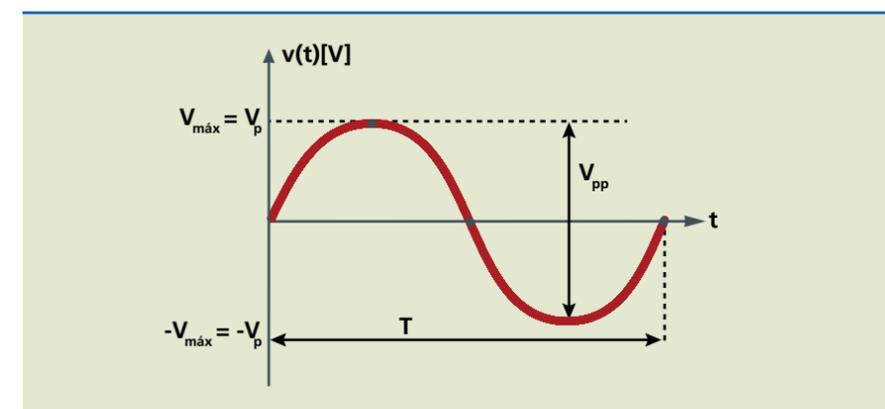
$$T = \frac{1}{60} = 16,67 \text{ ms}$$

o que dá ideia da velocidade com que o sinal alternado se movimenta.

Em outros países da América Latina, como o Paraguai, a frequência adotada é de 50 Hz.

### 11.1.1 Outras grandezas importantes referentes ao sinal CA

Aqui, adota-se como referência o sinal senoidal, mas as definições das grandezas são válidas para as demais formas de onda. O gráfico da figura 11.7 mostra algumas dessas grandezas.



**Figura 11.7**

Valor de pico da tensão e valor de pico a pico.

#### Valor de pico ( $V_p = V_{\text{máx}}$ )

É o máximo valor da tensão no hemisiciclo positivo do sinal.

$$-V_p = -V_{\text{máx}}$$

É o mínimo valor da tensão no semi-hemisiciclo negativo do sinal CA.



**Valor de pico a pico ( $V_{pp}$ )**

É o dobro da amplitude do sinal; corresponde, em módulo, ao valor que vai do pico no hemisiclo positivo ao pico no hemisiclo negativo do sinal.

$$V_{pp} = 2V_{m\acute{a}x} = 2V_P \quad (11.11)$$

**Valor médio**

Também chamado de valor DC ( $V_m = V_{DC}$ ), corresponde a uma componente contínua que graficamente divide um ciclo do sinal CA em duas áreas iguais em módulo, como mostra a figura 11.8.

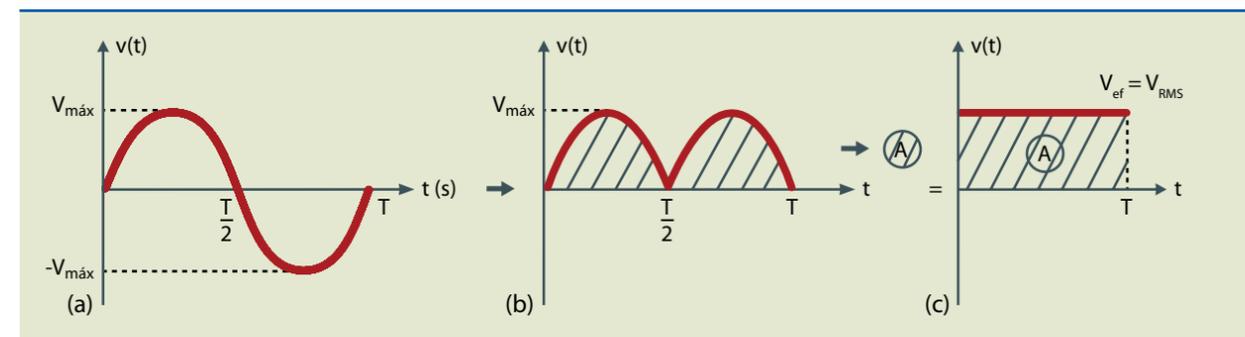
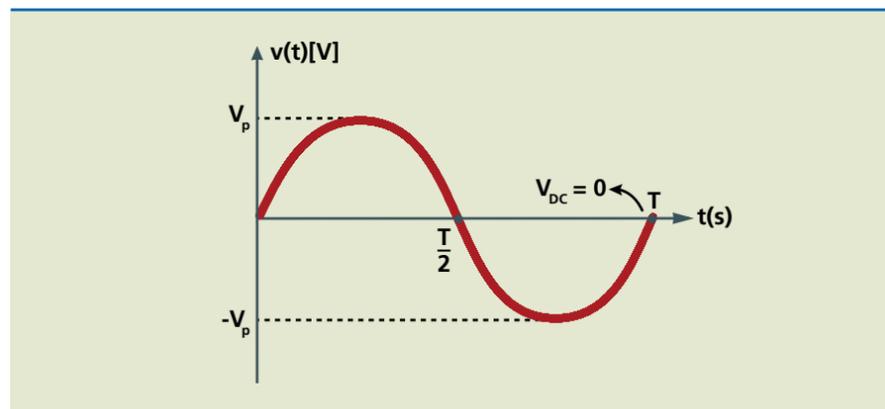
**RMS é a sigla de *root mean square* (raiz quadrada média), termo originário da fórmula que permite o cálculo do valor eficaz.**

**Valor eficaz**

Também chamado de valor **RMS** ( $V_{ef} = V_{RMS}$ ), corresponde a uma componente contínua imaginária que, no mesmo intervalo de um ciclo do sinal CA, produz a mesma potência total desse sinal.

Graficamente, podemos dizer que a área total das duas figuras (no intervalo de um período do sinal CA) possui o mesmo módulo (figura 11.10).

**Figura 11.8**  
Valor médio de tensão alternada é zero.



**Figura 11.10**  
(a) Gráfico de uma tensão senoidal pura; (b) área total (em módulo) da curva da tensão em um ciclo completo; (c) área equivalente para uma tensão constante (tensão eficaz) no mesmo período,

No caso de um sinal alternado senoidal puro, que será objeto de nossos estudos a seguir, vale sempre a relação, independentemente da frequência desse sinal:

$$V_{ef} = V_{RMS} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{V_{pp}}{2\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot V_{m\acute{a}x} \quad (11.12)$$

Cabe observar que o valor eficaz é o mais importante dos valores já analisados, pois representa a média dos valores, ou seja, o que de fato está ocorrendo no sinal CA, ao passo que  $V_{m\acute{a}x}$  ou  $V_p$  ocorrem apenas duas vezes em cada ciclo. Portanto, no caso de uma tomada de tensão de 220 V, esse valor corresponde ao valor eficaz ou RMS do sinal.

Em São Paulo, as concessionárias de energia elétrica, após estudo solicitado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de São Paulo (USP), padronizaram suas tensões secundárias de alimentação para uso residencial nos seguintes valores eficazes: 127 V/220 V, 115 V/230 V, 108 V/220 V. Os fabricantes de produtos eletrodomésticos e lâmpadas tiveram de se adaptar a esses valores, principalmente ao de 127 V/220 V, que, segundo o estudo, permite maior vida útil aos equipamentos.

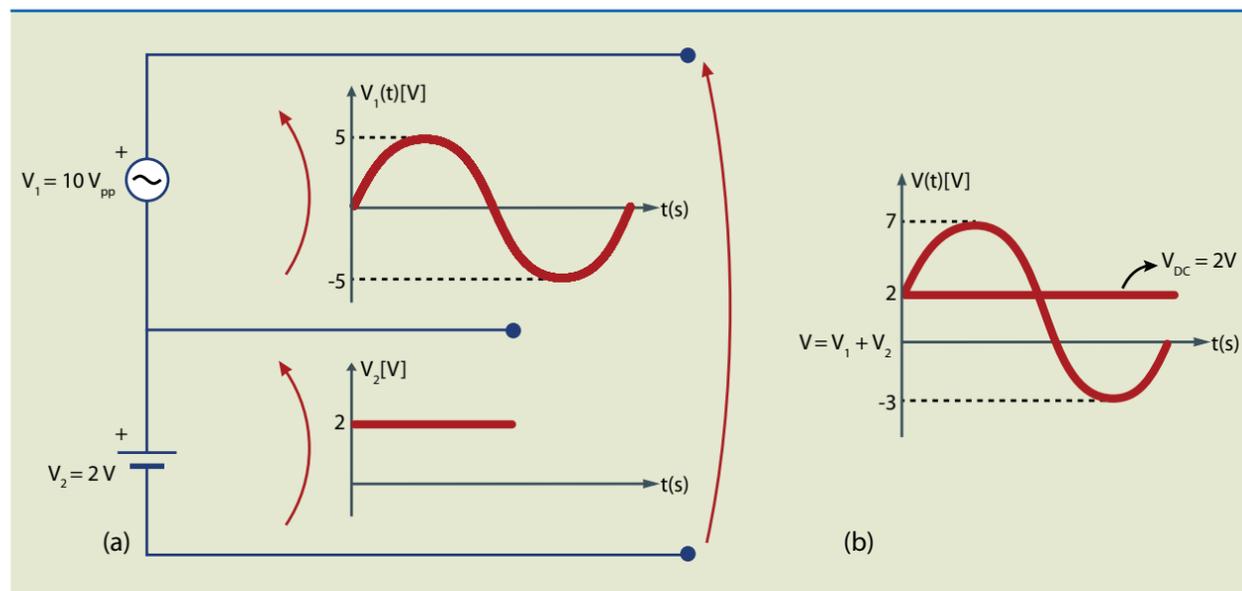
**Ângulo de fase inicial ( $\phi$ )**

O gráfico da figura 11.11a representa o sinal senoidal de uma tensão que no instante  $t = 0$  tem valor  $V = 0$ . Nesse caso, a fase inicial ou ângulo de fase inicial  $\phi$  é igual a zero.

Lembrando que  $\omega t = \phi$ , obtém-se a expressão  $V = V_{m\acute{a}x} \text{sen}\phi$ , que no instante  $t = 0$  resulta em  $0 = V_{m\acute{a}x} \text{sen}\phi$ .

**Figura 11.9**  
(a) Fonte de tensão contínua associada com outra alternada cujo valor de pico a pico é 10; (b) gráfico da tensão resultante e do valor médio da tensão.

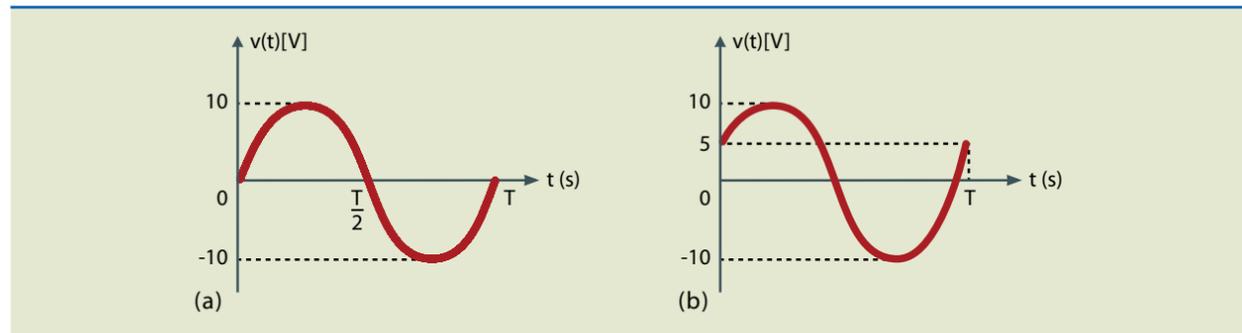
Em um sinal alternado puro, a componente contínua que divide o gráfico em duas áreas iguais coincide com o eixo do tempo, ou seja, o valor médio é zero (nulo). Já no caso da figura 11.9, a tensão total  $V$  é a soma de uma tensão alternada com uma contínua, e o valor médio é 2 V, que corresponde ao valor da fonte contínua.



Como  $V_{m\acute{a}x} \neq 0$ , então  $\text{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$ .

**Figura 11.11**

(a) Gráfico de sinal senoidal com ângulo de fase igual a zero;  
 (b) sinal de igual período ao de (a), mas com ângulo de fase igual a  $30^\circ$ .



Assim, em  $t = 0$ ,  $V(0) = 0$ , o que representa  $\text{sen}(\omega t) = 0$ . Logo, o sinal possui ângulo de fase inicial igual a zero ( $\varphi = 0$ ).

Na figura 11.11b, no instante  $t = 0$ , o valor da tensão é igual a 5 V. Seguindo o raciocínio anterior:

$$5 = 10\text{sen}\varphi \Rightarrow \text{sen}\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad ou } \theta = 30^\circ$$

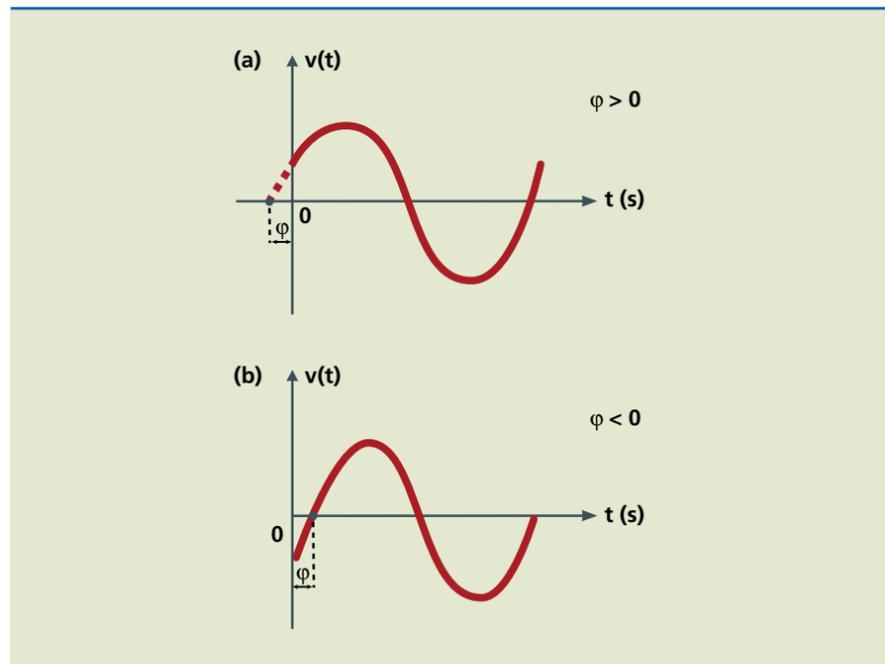
Logo, o sinal possui ângulo de fase inicial igual a  $30^\circ$ . Como  $\omega t = 0$  ( $t = 0$ ) pode-se reescrever a equação característica do sinal alternado senoidal da seguinte maneira:

$$V(t) = V_{m\acute{a}x}\text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (11.13)$$

Dependendo ainda da análise gráfica, o sinal alternado estará adiantado ( $\varphi > 0$  ou positivo) ou atrasado ( $\varphi < 0$  ou negativo), conforme indicado na figura 11.12.

**Figura 11.12**

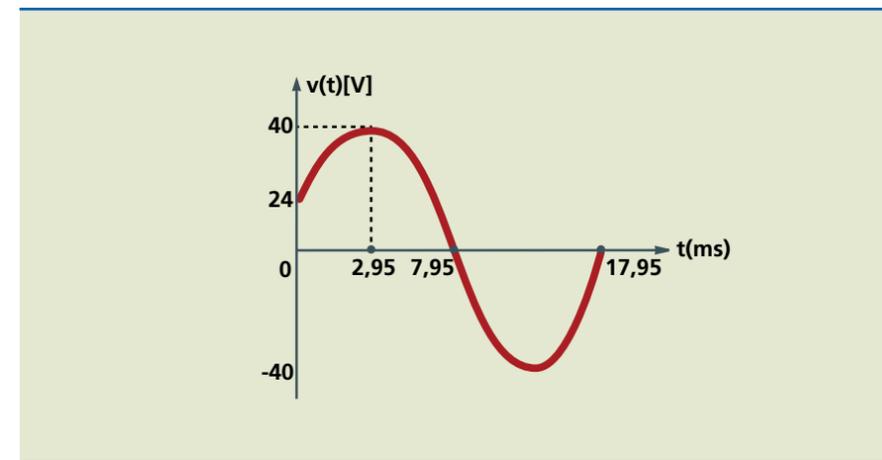
(a) Sinal adiantado  $\varphi > 0$ ;  
 (b) sinal atrasado  $\varphi < 0$ .



**Exemplo**

Para o sinal senoidal da figura 11.13, determine:

**Figura 11.13**



- a)  $V_{m\acute{a}x}$ .
- b) Valor de pico a pico.
- c) Período.
- d) Frequência.
- e) Velocidade angular.
- f) Equação de  $V(t)$ .
- g) Valor da tensão para  $t = 2 \text{ ms}$ .

*Solução:*

No gráfico, observa-se que:

- a)  $V_{m\acute{a}x} = 40 \text{ V}$
- b)  $V_{pp} = 2 \cdot V_{m\acute{a}x} = 80 \text{ V}$
- c) Período:  $T = 20 \text{ ms}$
- d) Frequência:  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{20} = 50 \text{ s}^{-1}$
- e) Velocidade angular:  $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$
- f) Equação de  $V(t)$ :

$$V(t) = V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Determinação do ângulo de fase inicial:

Para  $t = 0$ ,  $V(0) = 24\text{V}$ , logo

$$24 = 40\text{sen}(314 \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow \text{sen}\varphi = \frac{24}{40} = 0,6 \Rightarrow \varphi \cong 0,64\text{rad}$$



Portanto:

$$V(t) = 40 \cdot \text{sen}(314 \cdot t + 0,64) \text{ [V]}$$

f) V para  $t = 2 \text{ ms}$ :

$$V(2) = 40 \text{sen}(314 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 0,64) = 40 \text{sen}(0,628 + 0,64) = 40 \cdot 0,954 = 38,16 \text{ V}$$

### Defasagem

Quando analisamos dois ou mais sinais alternados de mesmo tipo e mesma frequência, devemos observar no gráfico o comportamento de seus principais pontos ( $V_{pp}$ , zero) e verificar se eles ocorrem ou não no mesmo instante (hemiciclos positivo e negativo de ambos ocorrendo juntos), e o mesmo com os pontos de máximo e zeros. Nesse caso, os sinais estarão em fase, como mostra a figura 11.14a.

Se os hemiciclos estiverem invertidos (um no positivo, o outro no negativo), os sinais estarão defasados. Na figura 11.14b,  $V_1$  está adiantado de  $\varphi$  em relação a  $V_2$ . Logo:

$$V_1 = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ e}$$

$$V_2 = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

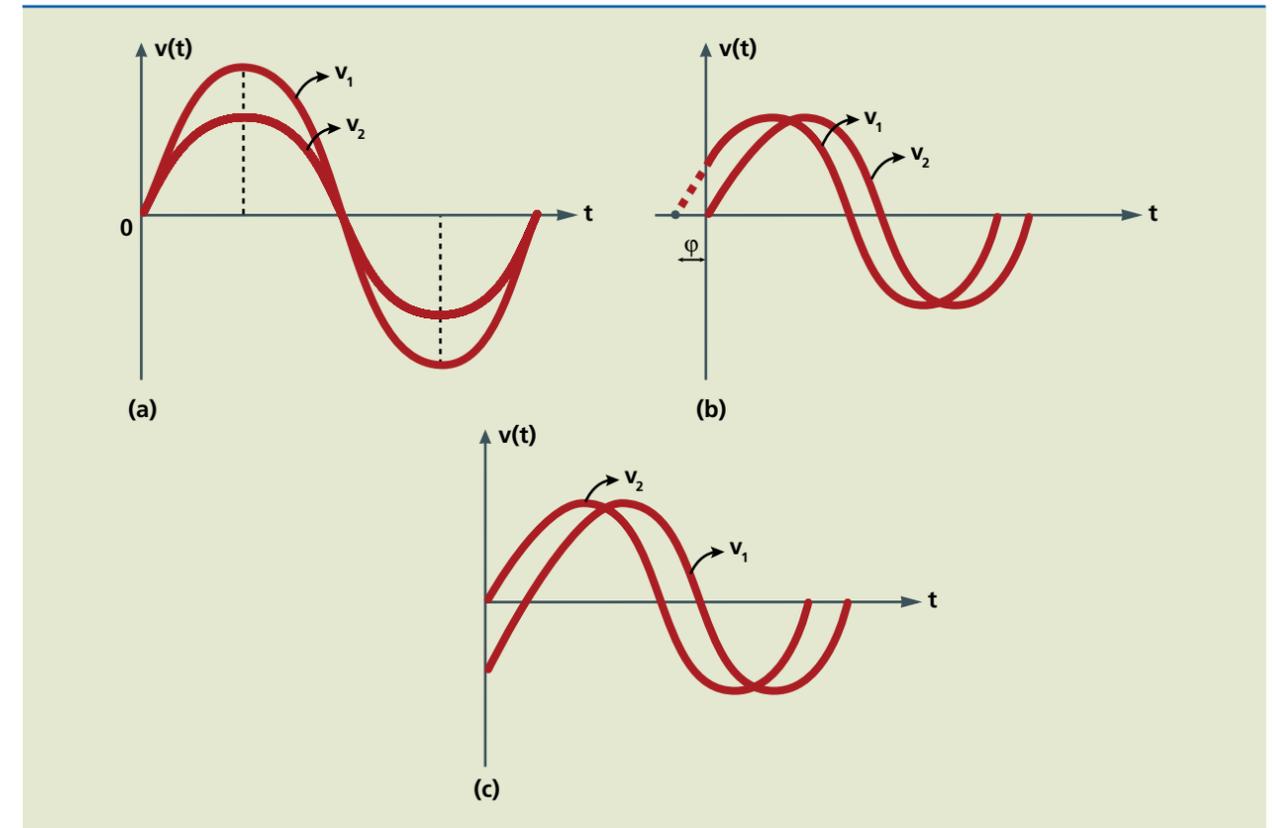
Se os hemiciclos forem coincidentes e os pontos de máximo e zeros estiverem deslocados, os sinais também estarão defasados. Na figura 11.14c,  $V_1$  está atrasado de  $\varphi$  em relação a  $V_2$ . Logo:

$$V_1 = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \text{ e}$$

$$V_2 = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Outra ferramenta importante para a análise de sinais alternados é feita por meio dos diagramas fasoriais, que permitem efetuar as operações básicas entre vários sinais, como soma, subtração etc.

É também possível simplificar essa análise, sem a construção dos diagramas, utilizando o recurso dos números complexos, que veremos a seguir.



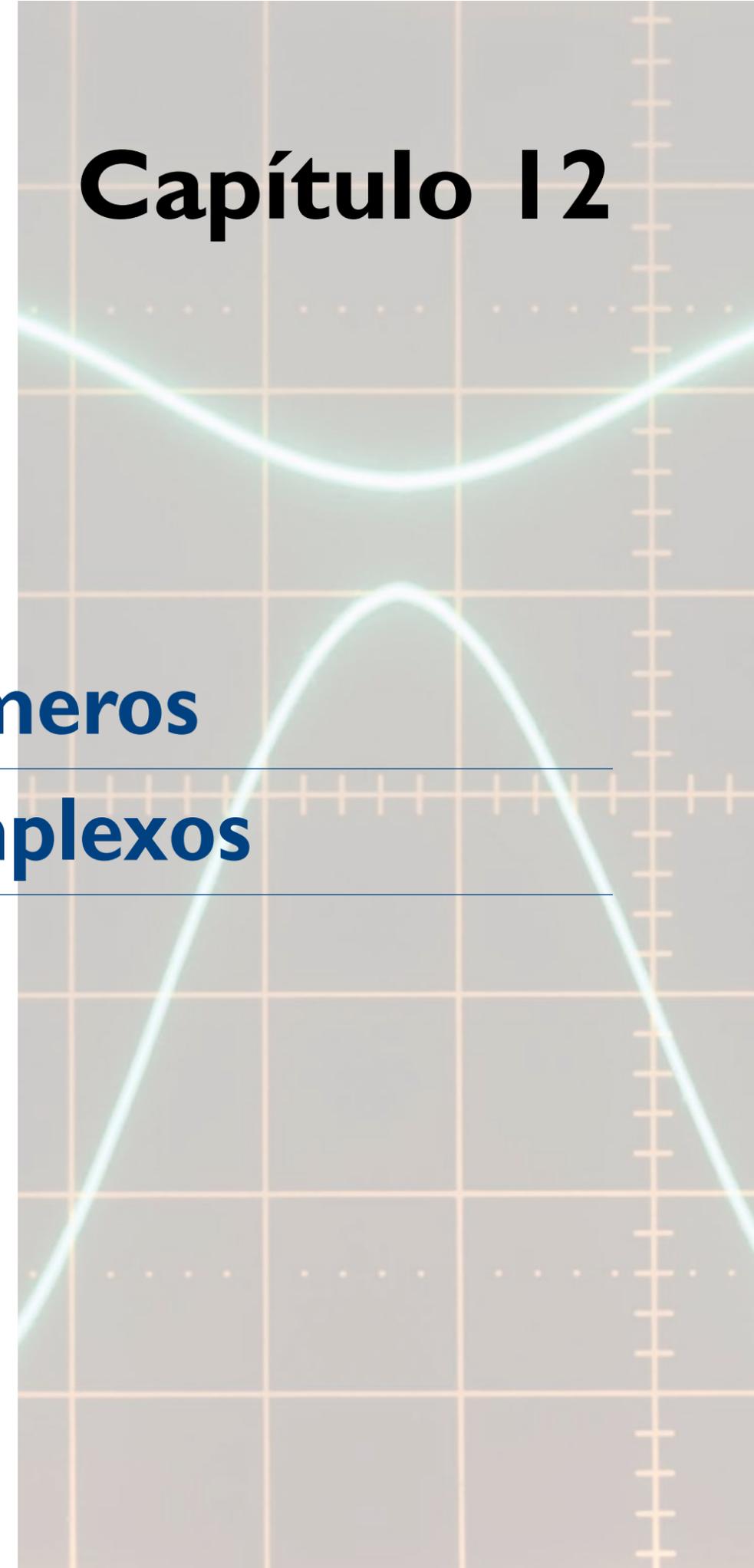
**Figura 11.14**

(a) Sinais em fase;  
(b) e (c) sinais defasados.



# Capítulo 12

## Números complexos



O conjunto dos números complexos compreende todos os reais e os chamados números imaginários, representados por pares ordenados, nos quais a abscissa é um número real e a ordenada, um múltiplo real da raiz quadrada de  $-1$ . Em matemática, a unidade imaginária ( $\sqrt{-1}$ ) é indicada por  $i$ , e, em eletricidade, para não confundirmos com a corrente elétrica, por  $j$ :

$$j = \sqrt{-1}$$

Para representar outros números imaginários, como  $\sqrt{-4}$ , é preciso lembrar que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = j2$$

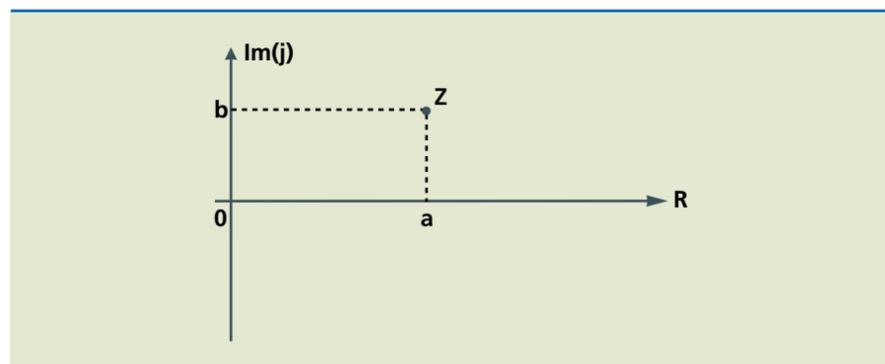
## 12.1 Formas de representação

Os números complexos podem ser representados de duas formas: cartesiana ou retangular; polar ou trigonométrica.

### 12.1.1 Forma cartesiana ou retangular

Seja  $Z$  um número complexo qualquer (figura 12.1).

**Figura 12.1**  
Representação cartesiana de um número complexo  $z$ .



Pode-se representá-lo por:

$$z = a + jb \quad (12.1)$$

em que  $a$  e  $b$  são números reais.

### 12.1.2 Forma polar ou trigonométrica

No gráfico da figura 12.2, o ponto que representa o número complexo  $Z$  encontra-se a determinada distância da origem  $(0;0)$ , definida como o módulo do número complexo  $Z$ :  $|Z|$ .

Essa distância pode ser obtida aplicando o teorema de Pitágoras a qualquer dos triângulos da figura.

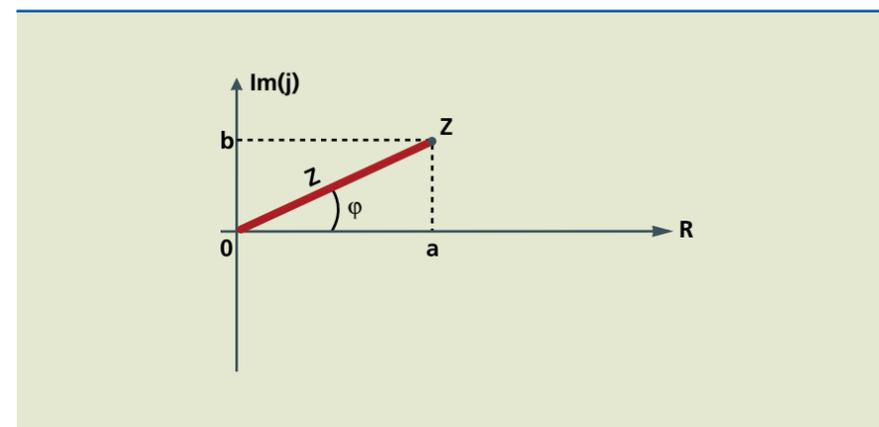
Assim:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

ou

$$Z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12.2)$$

O fato de conhecer essa distância, ou seja, o módulo, não nos permite determinar exatamente um número complexo, uma vez que qualquer ponto em uma circunferência de raio  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  com centro em  $(0;0)$  poderia ser a solução. Para encontrar esse número, utiliza-se a forma chamada polar, que associa ao número o ângulo  $\varphi$ , formado pela direção do módulo de  $Z$  e pelo eixo horizontal. Esse ângulo é considerado positivo no sentido anti-horário e negativo no horário.



**Figura 12.2**  
Representação de um número complexo.

Assim, o número complexo  $Z$  pode ser escrito na forma polar como:

$$z = |z|\cos\varphi + |z|j\text{sen}\varphi \quad (12.3)$$

As equações 12.1 e 12.3 são idênticas, pois definem o mesmo número. Então, é possível estabelecer a seguinte relação entre a forma polar e a cartesiana:

$$a = |z|\cos\varphi \quad (12.4)$$

$$b = |z|j\text{sen}\varphi \quad (12.5)$$



A letra maiúscula ( $Z$ ) se refere ao módulo do número complexo e a minúscula ( $z$ ), ao número complexo propriamente dito. O ângulo  $\varphi$  é chamado argumento do número complexo.

Para simplificar as operações e a escrita, vamos recorrer à seguinte notação para indicar o número complexo  $Z$  na forma polar:

$$z = Z \angle \varphi \quad (12.6)$$

em que o símbolo  $\angle \varphi$  indica  $\cos\varphi + j\sin\varphi$  e é lido como “cis fi”.

## 12.2 Conjugado de um número complexo

Na forma cartesiana, denomina-se conjugado de um número complexo  $z = a + bj$  o número:

$$\bar{z} = a - bj \quad (12.7)$$

Na forma polar, esse número é representado por:

$$z = Z \angle -\varphi \quad (12.8)$$

A relação entre um número complexo e seu conjugado é dada por:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (12.9)$$

## 12.3 Operações com números complexos

É possível efetuar as principais operações com números complexos (soma, subtração, multiplicação e divisão). Em algumas delas, é mais conveniente o emprego da forma cartesiana; em outras, a forma polar.

### 12.3.1 Soma e subtração

Nesses casos, trabalha-se com os números complexos na forma cartesiana ou retangular.

Sejam os números complexos:

$$z_1 = a_1 + b_1j$$

e

$$z_2 = a_2 + b_2j$$

O resultado da soma entre eles será:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2) \quad (12.10)$$

e da subtração:

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + j(b_1 - b_2) \quad (12.11)$$

### 12.3.2 Multiplicação

Nesse caso, trabalha-se com os números complexos na forma polar.

Sejam os números complexos:

$$z_1 = Z_1 \angle \varphi_1 \quad \text{e} \quad z_2 = Z_2 \angle \varphi_2$$

A multiplicação entre eles terá como resultado:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (Z_1 \cdot Z_2) \angle \varphi_1 + \varphi_2 \quad (12.12)$$

Portanto, o módulo resultante corresponde ao produto dos módulos, e o argumento resultante, à soma dos argumentos dos números complexos.

### 12.3.3 Divisão

A operação de divisão não está definida. Em vez disso, realiza-se a multiplicação entre o primeiro número e o complexo conjugado do segundo.

Pode-se escrever  $\frac{z_1}{z_2}$  como:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2} = \frac{(Z_1 \angle \varphi_1) \cdot (Z_2 \angle -\varphi_2)}{(Z_2 \angle \varphi_2) \cdot (Z_2 \angle -\varphi_2)} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \angle \varphi_1 - \varphi_2}{Z_2^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right) \angle \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned} \quad (12.13)$$

Portanto, o módulo resultante corresponde ao quociente dos módulos, e o argumento resultante, à diferença dos argumentos dos números complexos.

## 12.4 Representação da corrente alternada com números complexos

Dada a equação de uma tensão alternada:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (12.14)$$

Pode-se representá-la na forma polar:

$$V = V_{\text{máx}} \angle \varphi \quad (12.15)$$



Da mesma maneira, representamos uma corrente elétrica pela equação:

$$i(t) = i_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ e } i = i_{\text{máx}} \underline{\varphi} \quad (12.16)$$

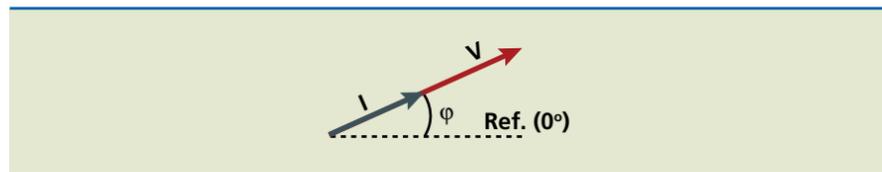
### 12.5 Diagrama de fasores (ou fasorial)

Fasor é um vetor de rotação que, em seu movimento circular e uniforme, permite representar uma onda senoidal, indicando a amplitude do sinal e o ângulo de fase inicial. No diagrama fasorial de um circuito, são indicadas todas as tensões e correntes nele existentes.

A figura 12.3 mostra a corrente e a tensão representadas por fasores na mesma direção e sentido com ângulo de fase inicial  $\varphi$ .

**Figura 12.3**

Representação fasorial da corrente e da tensão.



O fato de a corrente e a tensão terem a mesma direção e sentido significa que não há defasagem entre elas.

# Capítulo 13

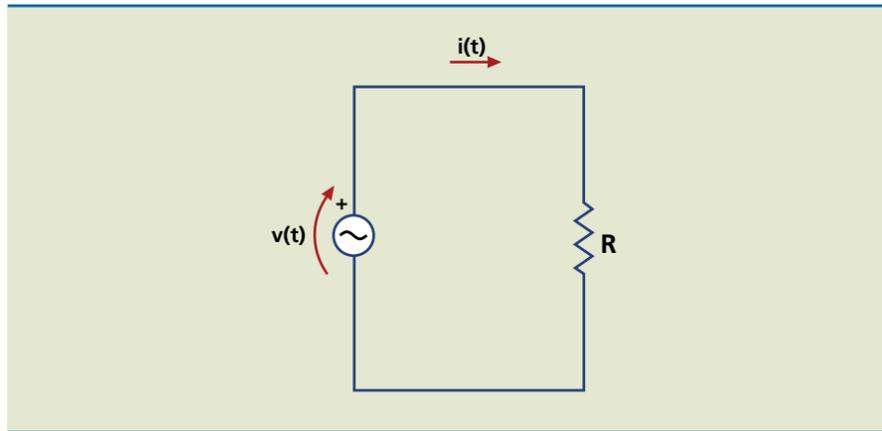
## Circuitos simples em corrente alternada



### 13.1 Circuito resistivo

Consideremos o circuito da figura 13.1.

**Figura 13.1**  
Circuito CA com  
resistência R.

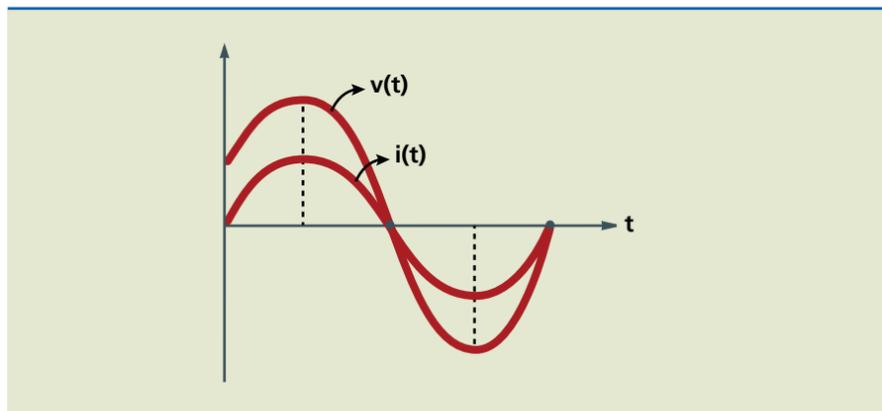


Quando se liga o circuito, sua resposta é imediata: surge uma corrente elétrica que percorrerá a resistência e se estabelece uma tensão nos terminais dela, ambas no mesmo hemicírculo, com pontos de máximo, zero e mínimo nos mesmos instantes.

Em corrente alternada, valem as mesmas leis que se aplicam à corrente contínua.

A corrente que surgirá no circuito segue a lei de Ohm e não ocorre defasagem entre a tensão e a corrente no circuito, como mostra o gráfico da figura 13.2.

**Figura 13.2**  
Gráfico da tensão e  
da corrente alternadas  
em circuito resistivo.



Pelo gráfico, é possível escrever as equações para a corrente e tensão no circuito:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ e } V = V_{\text{máx}} \underline{\underline{\varphi}} \quad (13.1)$$

$$i(t) = i_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ e } i = i_{\text{máx}} \underline{\underline{\varphi}} \quad (13.2)$$

Aplicando a lei de Ohm, obtém-se:

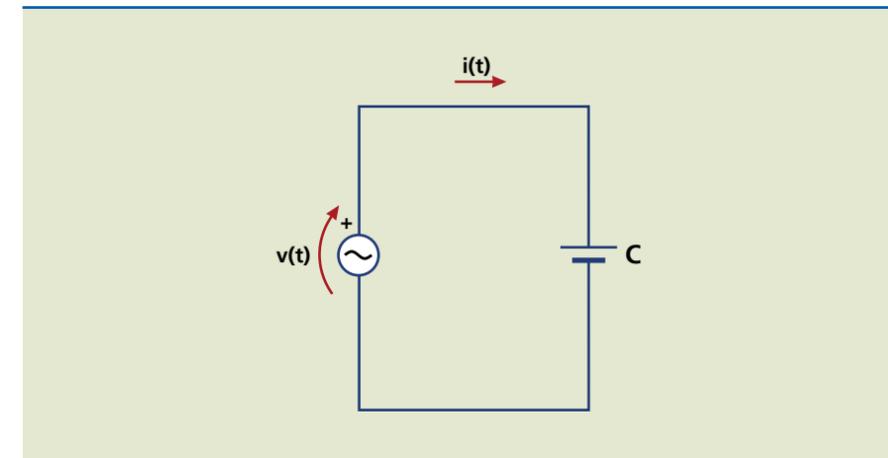
$$R = \frac{V(t)}{i(t)} \Rightarrow R = \frac{V_{\text{máx}}}{i_{\text{máx}}} \underline{\underline{0}} \quad (13.3)$$

Nessa relação, a componente imaginária é zero.

### 13.2 Circuito capacitivo

Consideremos o circuito da figura 13.3.

**Figura 13.3**



Quando se liga o circuito, o capacitor está totalmente descarregado: sua tensão é zero (nula) e a corrente elétrica é máxima. Isso significa que há uma defasagem de  $90^\circ$  entre a tensão e a corrente, ou seja, a corrente está adiantada em relação à tensão, mantendo-se assim enquanto o circuito estiver ligado. Quando a tensão sobre o capacitor for nula, a corrente será máxima e vice-versa. Os gráficos da figura 13.4 representam essa situação ao longo de um período.

As equações para a corrente e tensão no circuito são assim escritas:

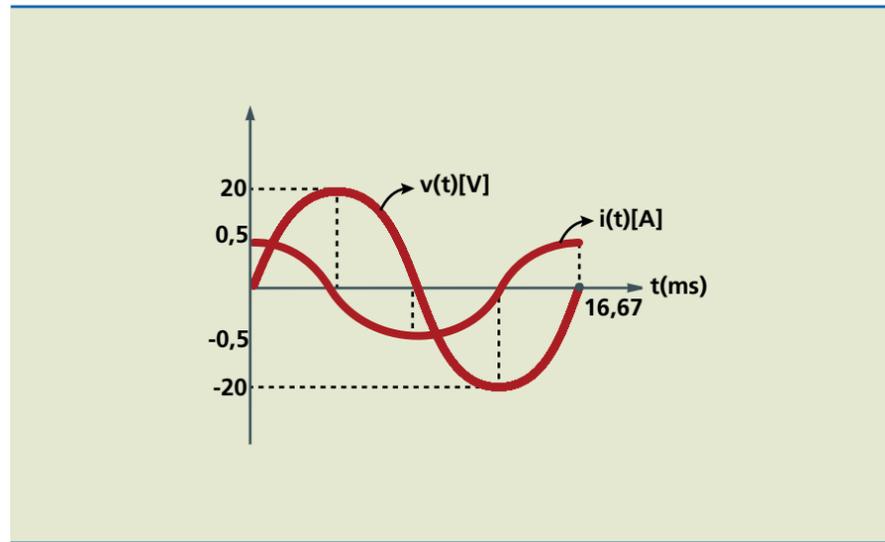
$$V(t) = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + 0) \text{ e } V = V_{\text{máx}} \underline{\underline{0}} \Rightarrow V = 20 \underline{\underline{0}}$$

$$i(t) = i_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ e } i = i_{\text{máx}} \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow i = 0,5 \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$



**Figura 13.4**

Gráficos da tensão e da corrente em circuito capacitivo.



A oposição que o capacitor oferece à passagem da corrente elétrica depende da frequência do sinal elétrico aplicado. Essa oposição é chamada reatância capacitiva ( $X_C$ ), medida em ohms e expressa por:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} \quad [\Omega]$$

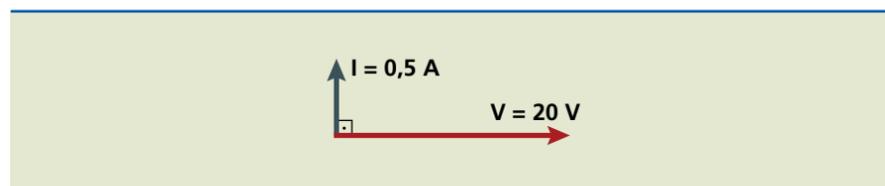
Aplica-se, nesse caso, a lei de Ohm:

$$X_C = \frac{V(t)}{i(t)} = \frac{V_{\text{máx}}}{i_{\text{máx}}} \left| -\frac{\pi}{2} \right| \Rightarrow X_C = \frac{20}{0,5} \left| -\frac{\pi}{2} \right| = -40j$$

O diagrama fasorial do circuito será o demonstrado na figura 13.5.

**Figura 13.5**

Diagrama fasorial de circuito capacitivo.



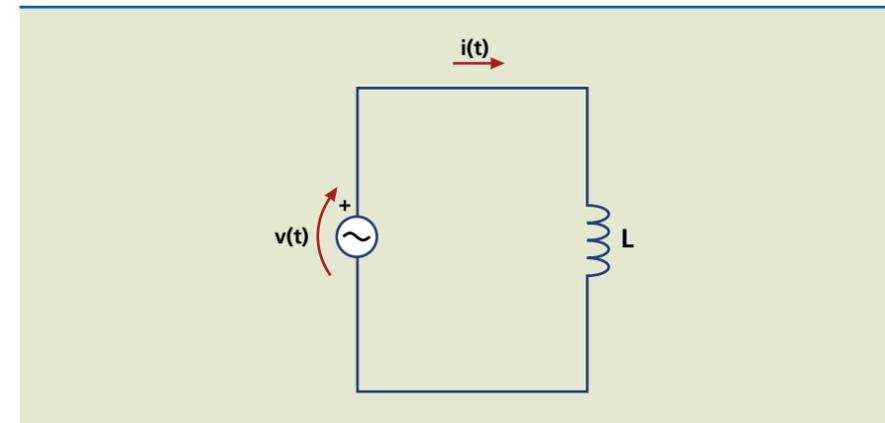
No exemplo anterior, como a frequência é de 60 Hz, pode-se determinar o valor da capacitância.

$$C = \frac{1}{X_C \cdot 2\pi f} \cong \frac{1}{40 \cdot 377} \Rightarrow C \cong 66,3 \mu\text{F}$$

Não há potência média dissipada, pois no hemiciclo positivo o capacitor recebe energia do gerador e no negativo a devolve integralmente.

### 13.3 Circuito indutivo

Consideremos o circuito da figura 13.6.



**Figura 13.6**

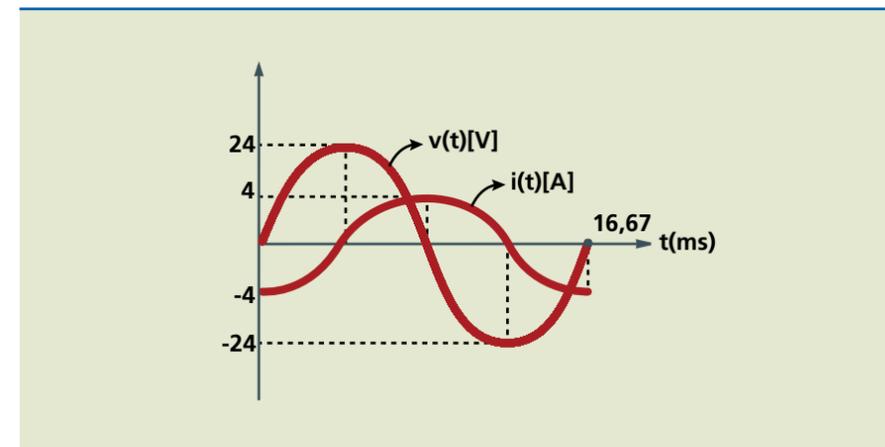
Circuito com indutância L.

No instante inicial ( $t = 0$ ), o indutor está totalmente desenergizado; logo, sua corrente elétrica é zero (nula) e toda a tensão do gerador está aplicada nele. Nos instantes seguintes, a ação da corrente elétrica sobre o indutor (campo magnético) dá origem a uma defasagem de  $90^\circ$  entre a tensão e a corrente, ou seja, a corrente está atrasada em relação à tensão, mantendo-se assim enquanto o circuito estiver ligado.

De modo análogo aos capacitores, o indutor oferece oposição à passagem da corrente elétrica, mas, nesse caso, ela depende diretamente da frequência do sinal aplicado. Essa oposição recebe o nome de reatância indutiva ( $X_L$ ), medida em ohms e expressa por:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$$

Lembrando o comportamento do indutor em DC, quando a tensão sobre ele é nula, a corrente é máxima e vice-versa. Dessa maneira, obtêm-se os gráficos da figura 13.7.



**Figura 13.7**

Gráficos da tensão e da corrente em circuito indutivo.



Assim, é possível, escrever as equações para a corrente e tensão no circuito:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + 0) \text{ e } V = V_{\text{máx}} \underline{0} \Rightarrow V = 24 \underline{0}$$

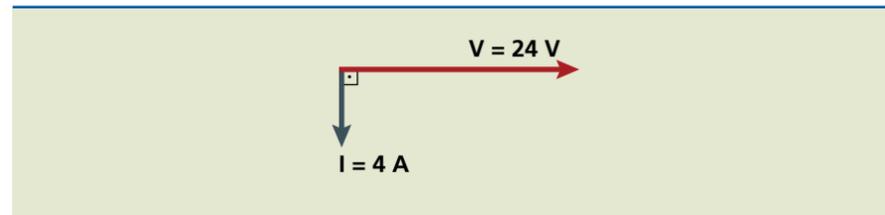
$$i(t) = i_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \text{ e } i = i_{\text{máx}} \underline{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i = 4 \underline{-\frac{\pi}{2}}$$

Aplica-se, então, a lei de Ohm:

$$X_L = \frac{V(t)}{i(t)} = \frac{V_{\text{máx}}}{i_{\text{máx}}} \underline{0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow X_L = \frac{24}{4} \underline{\frac{\pi}{2}} = 6j$$

O diagrama fasorial do circuito será o ilustrado na figura 13.8.

**Figura 13.8**  
Diagrama fasorial de  
circuito indutivo.



Considerando a frequência de 60 Hz, pode-se determinar o valor da indutância:

$$L = \frac{1}{X_L \cdot 2\pi f} \cong \frac{1}{6 \cdot 377} \Rightarrow L \cong 0,442 \text{ mH}$$

Assim como o capacitor, o indutor em CA não apresenta dissipação de potência média, pois no hemicírculo positivo recebe energia do gerador e no negativo a devolve integralmente.

# Capítulo 14

## Análise de circuitos em corrente alternada



A partir de agora analisaremos os circuitos nos quais ocorrem combinações entre os três elementos básicos: resistências, capacitores e indutores. A somatória dos efeitos de oposição à passagem de corrente é denominada impedância, representada por  $Z$ .

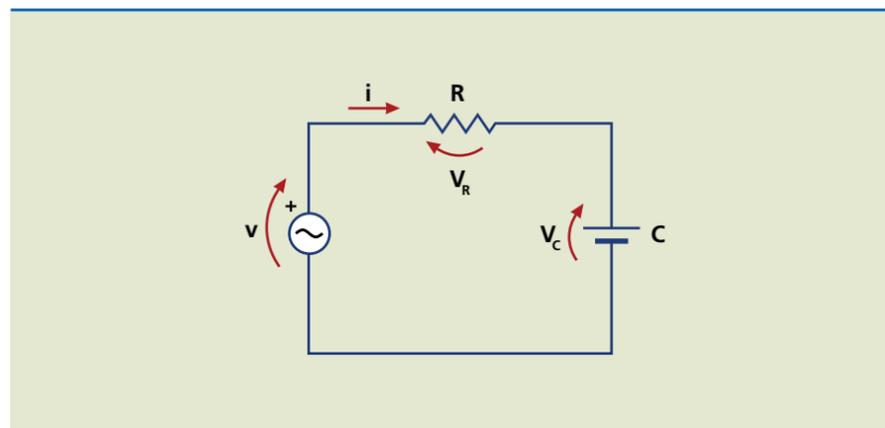
$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2} \quad (14.1)$$

Esta passa a ser a equação geral para a impedância total do circuito, não importando sua configuração. À impedância podem-se aplicar todas as leis de eletricidade conhecidas.

## 14.1 Circuito RC

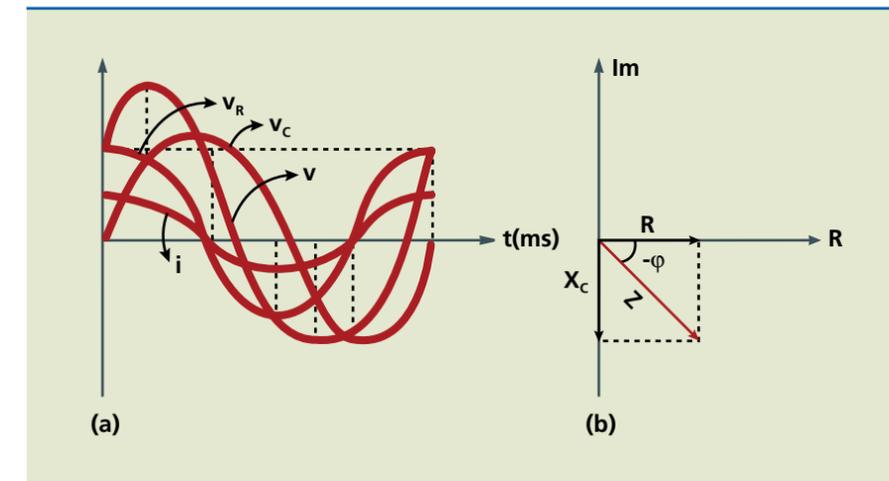
### 14.1.1 Resistência e capacitor em série

**Figura 14.1**  
Circuito RC em série.



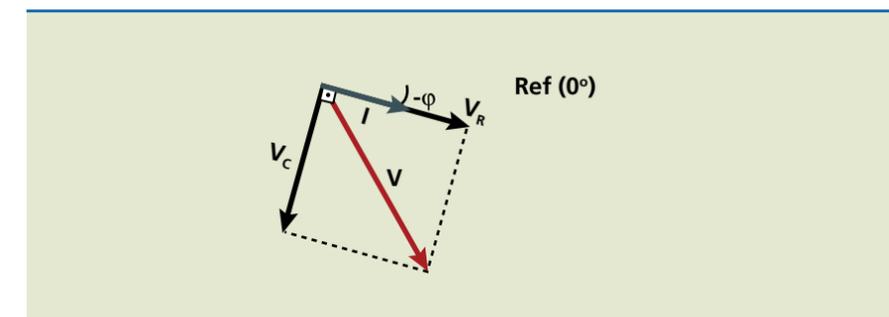
No circuito RC em série (figura 14.1), como no caso de corrente contínua, também surge uma corrente cujo valor é proporcional à impedância total do circuito. Essa corrente, por causa dos dispositivos diferentes, tem defasagem menor que  $90^\circ$  em relação à tensão do gerador. No entanto, como prevalece a influência do capacitor, a tensão está atrasada em comparação com a corrente. Separadamente, a relação entre a tensão e a corrente permanece em cada dispositivo.

A figura 14.2 ilustra essa situação.



**Figura 14.2**  
(a) Gráfico da tensão e da corrente em circuito RC em série; (b) representação polar da tensão e da corrente.

O diagrama fasorial é ilustrado na figura 14.3.



**Figura 14.3**  
Diagrama fasorial de circuito RC em série.

A impedância do circuito é dada por:

$$Z = \sqrt{X_C^2 + R^2} \quad (14.2)$$

#### Potências em corrente alternada

##### Potência ativa (P)

É a potência dissipada pelas resistências do circuito, na forma de calor. É a única que pode ser medida diretamente com wattímetro. As demais potências exigem outros recursos, como voltímetro ou amperímetro.

$$P = V_R \cdot i \quad (14.3)$$

##### Potência reativa (Q)

Corresponde à potência sobre o capacitor.

$$Q = V_C \cdot i \quad (14.4)$$



**Potência aparente (S)**

É a potência total, fornecida pelo gerador ao circuito.

$$S = V \cdot i$$

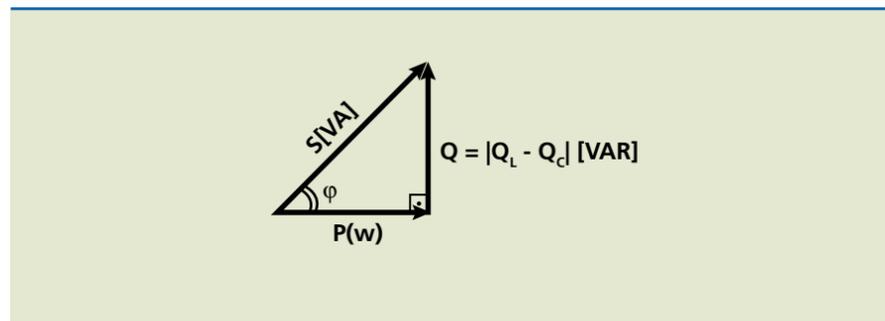
$$S = P + jQ \quad (14.5)$$

Essa soma é vetorial e pode-se efetuá-la por meio do triângulo de potências da figura 14.4.

Para o cálculo de potências, utilizam-se os valores eficazes de tensão e corrente.

**Figura 14.4**

Triângulo de potências.



Utilizando relações trigonométricas para o triângulo de potências, é possível escrever:

$$P = S \cdot \text{sen}\phi$$

Ao termo  $\text{cos}\phi$  é atribuído o nome de fator de potência (fp) do circuito.

As concessionárias de energia fornecem um valor constante de tensão para uso doméstico; logo, a variável em uma instalação elétrica é a corrente.

Analisando o triângulo de potências, percebe-se que, quanto maior a potência reativa, maior a corrente elétrica no circuito (não desejável); quanto maior o fator de potência, mais próximos se tornam os valores das potências aparente e ativa.

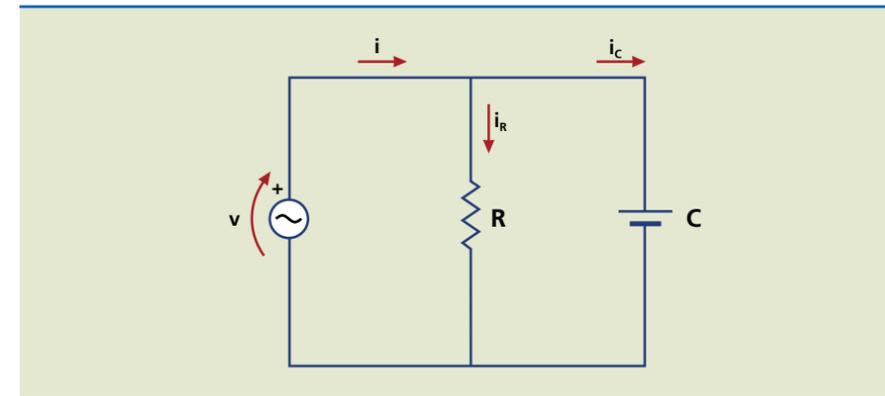
Para evitar excessos no sistema elétrico, as concessionárias exigem que o fator de potência tenha valor mínimo:

$$\text{fp} = \text{cos}\phi \geq 0,92$$

**14.1.2 Resistência e capacitor em paralelo**

No circuito RC em paralelo (figura 14.5), a tensão é a mesma do gerador nos vários dispositivos do circuito. Apenas as correntes em cada um deles são diferentes, proporcionais a cada resistência ou reatância (figura 14.6). A corrente total no gerador é a soma vetorial das correntes individuais:

$$i = i_R + j i_C \quad (14.6)$$



**Figura 14.5**

Circuito RC em paralelo.

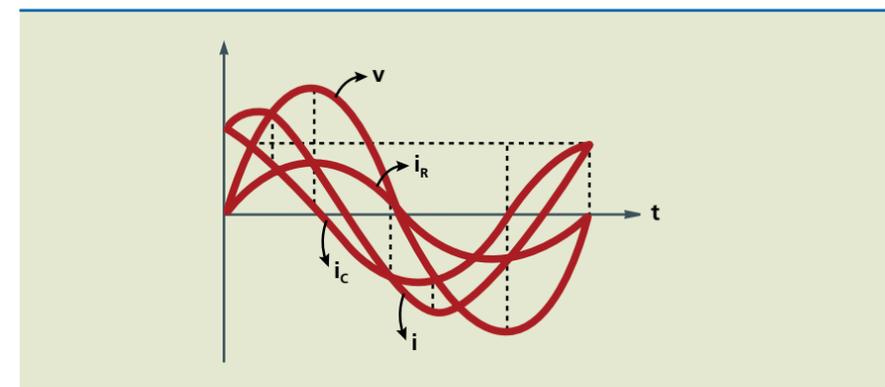
em que:

$$i = \frac{V}{Z}$$

$$i_R = \frac{V}{R}$$

$$i_C = \frac{V}{X_C}$$

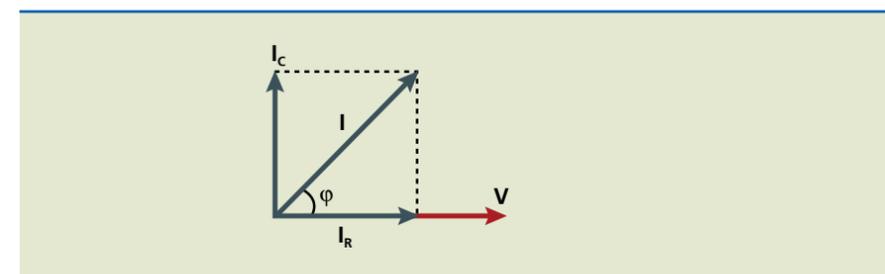
A impedância total do circuito é calculada da mesma forma que se calcula a resistência equivalente em paralelo.



**Figura 14.6**

Gráfico da tensão e das correntes em circuito RC paralelo.

O diagrama fasorial que representa essa situação é demonstrado na figura 14.7.



**Figura 14.7**

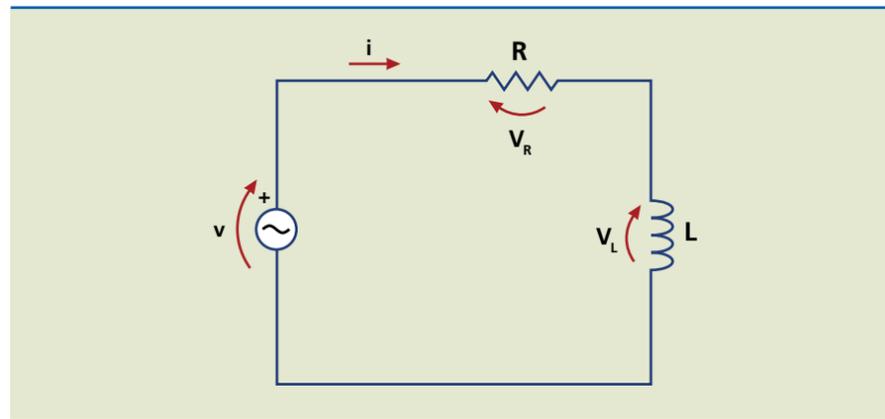
Diagrama fasorial de circuito RC em paralelo.



## 14.2 Circuito RL

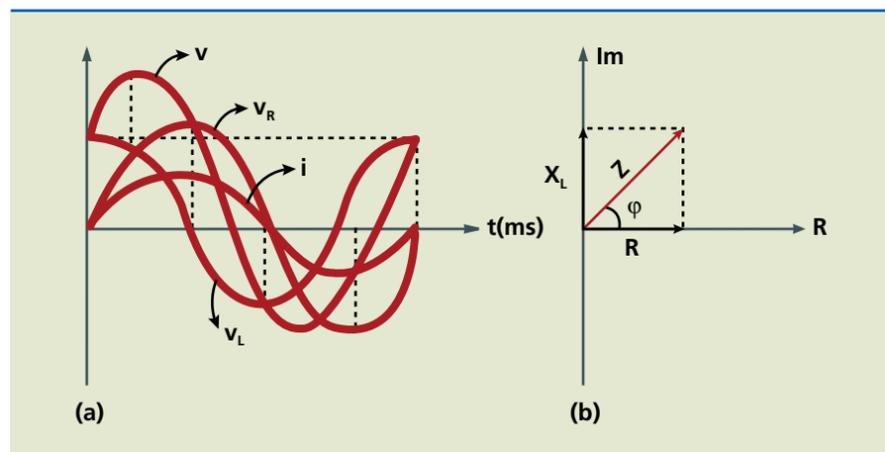
### 14.2.1 Resistência e indutor em série

**Figura 14.8**  
Circuito RL em série.



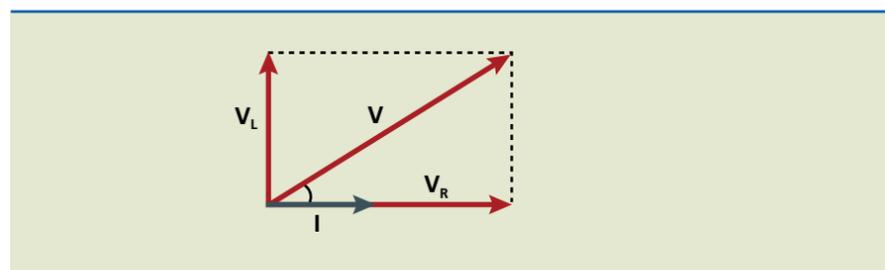
No circuito RL em série (figura 14.8), no instante inicial o indutor se comporta como circuito aberto, por causa da variação do campo magnético. A tensão é máxima e a corrente nula. O fluxo do campo magnético produz defasagem de  $90^\circ$  entre a tensão e a corrente, ou seja, a corrente está atrasada em relação à tensão, como apresentado na figura 14.9.

**Figura 14.9**  
(a) Gráfico das tensões e da corrente em circuito RL em série;  
(b) representação polar da tensão e da corrente.



O diagrama fasorial é mostrado na figura 14.10.

**Figura 14.10**  
Diagrama fasorial de circuito RL em série.



Nesse circuito, observam-se as seguintes relações entre os parâmetros:

- $Z = \sqrt{X_L^2 + R^2}$  e  $z = R + j \cdot X_L$

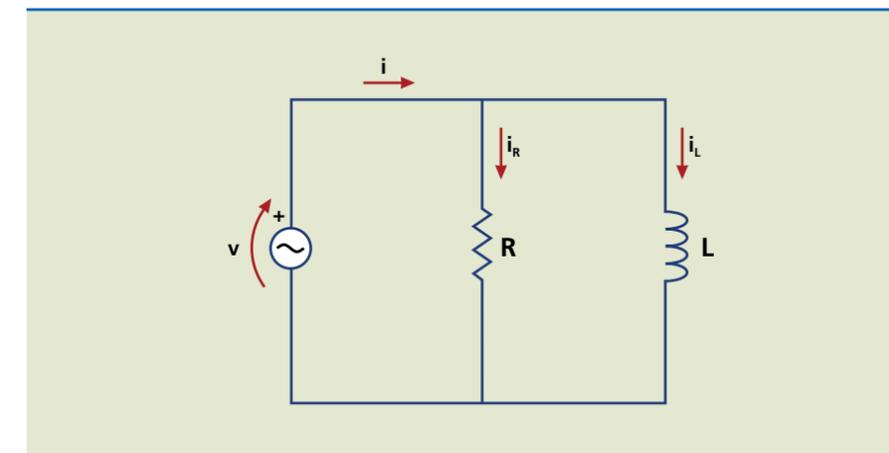
Na forma polar,  $z = Z \angle \phi$ , em que  $\phi = \arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$  é o ângulo de fase total do circuito.

- $i = \frac{v}{Z} \Rightarrow i = I \angle \phi$  constante para todo o circuito.

- $v_R = i \cdot R \Rightarrow v_R = V_R \angle \phi$  (14.7)

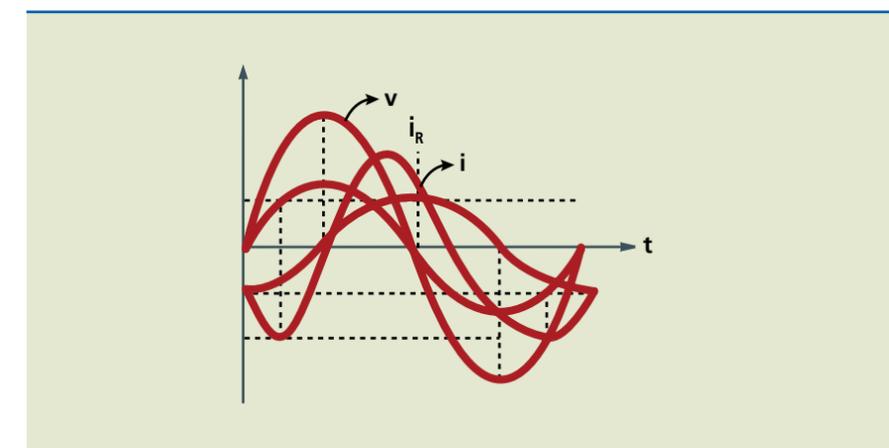
- $v_L = i \cdot X_L \Rightarrow v_L = V_L \angle \phi - 90^\circ$  (14.8)

### 14.2.2 Resistência e indutor em paralelo



**Figura 14.11**  
Circuito RL em paralelo.

No circuito RL em paralelo (figura 14.11), à parte certas características do indutor, seu comportamento mostra alguma semelhança com o que ocorre no capacitor. Nesse caso, a corrente no indutor está defasada de  $90^\circ$  em relação à tensão do gerador, enquanto a corrente total apresenta defasagem menor (figura 14.12).



**Figura 14.12**  
Gráfico da tensão e das correntes em circuito RL em paralelo.

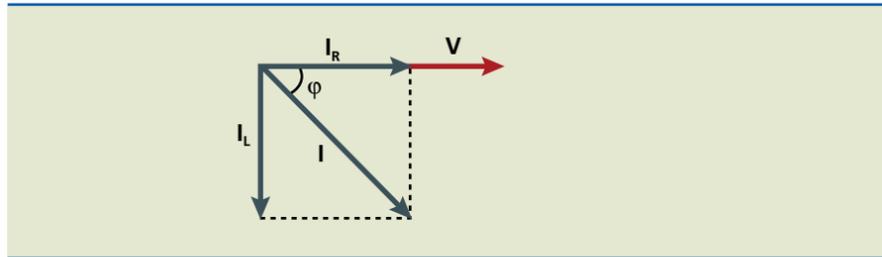


A corrente no circuito é expressa pela soma vetorial:

$$i = i_R + i_L$$

A figura 14.13 mostra o diagrama fasorial para essa associação.

**Figura 14.13**  
Diagrama fasorial de circuito RL em paralelo.



### 14.3 Aplicações dos circuitos RL e RC em série

Uma das principais aplicações práticas para os circuitos RC e RL em série são os chamados filtros passivos. Medimos a tensão em um dos componentes, que passa a ser denominada tensão de saída ( $V_S$ ), em contraste com a tensão de entrada ou do gerador ( $V_e$ ).

A análise é feita com base na influência da frequência sobre as reatâncias ora capacitivas, ora indutivas.

A relação entre as tensões de saída e entrada é denominada ganho de tensão ( $A_v$ ), em que:

$$A_v = V_S/V_e$$

Outra maneira de medir o ganho de tensão é em decibéis (db), grandeza relacionada com a orelha humana, que não responde à variação dos estímulos sonoros de modo linear, e sim logarítmico. Isso significa que, se a potência dobra de valor, o mesmo não ocorre com a sensação sonora.

O ganho de tensão em decibéis é calculado pela expressão:

$$A_{v/db} = 20 \log \left( \frac{V_S}{V_e} \right) \quad (14.10)$$

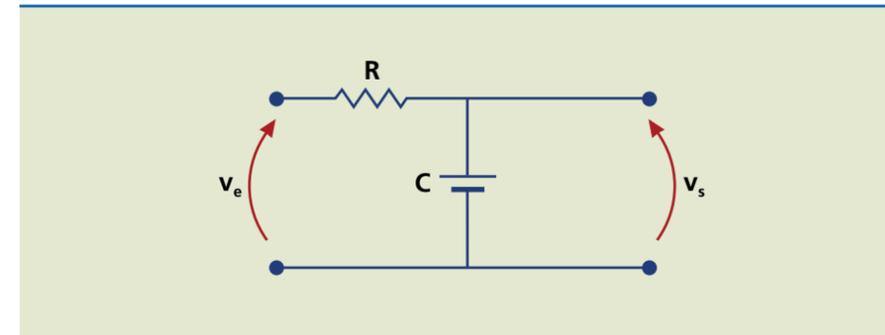
Se  $R_{entrada} = R_{saída}$ , todos os ganhos são iguais:

$$A_{v/db} = A_{p/db} = 10 \log(p_S/p_e)$$

em que:

- $A_p$  é o ganho de potência;
- $p_S$  a potência de saída;
- $p_e$  a potência de entrada.

Um circuito RC em série com tensão de saída no capacitor ( $V_C = V_S$ ), como o da figura 14.14, é denominado filtro passa-baixa, pois  $X_C$  é muito maior que  $R$  em baixas frequências. Assim, praticamente toda a tensão de entrada é aplicada ao capacitor.



**Figura 14.14**  
Circuito RC em série.

Nesse caso, podemos deduzir a frequência de corte ( $f_c$ ) como a frequência-limite de utilização do filtro ou a frequência para a qual o ganho de tensão é:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

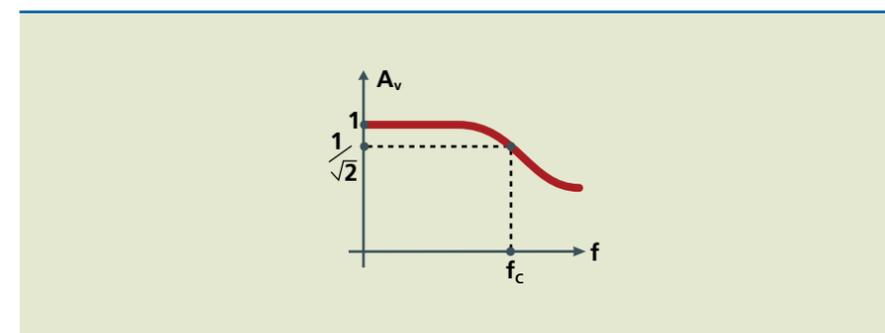
ou seja, quando a tensão de saída é 0,707 da tensão de entrada ou a potência de saída é a metade da potência de entrada.

Em decibéis, temos:

$$A_{p/db} = 10 \log(p_S/p_e) = 10 \log(1/2) = -3db$$

ou

$$A_{v/db} = 20 \log(v_S/v_e) = 20 \log(1/\sqrt{2}) = -3db \quad \text{(figura 14.15)}$$



**Figura 14.15**  
Gráfico do ganho de tensão em função da frequência.

A frequência de corte é dada por:

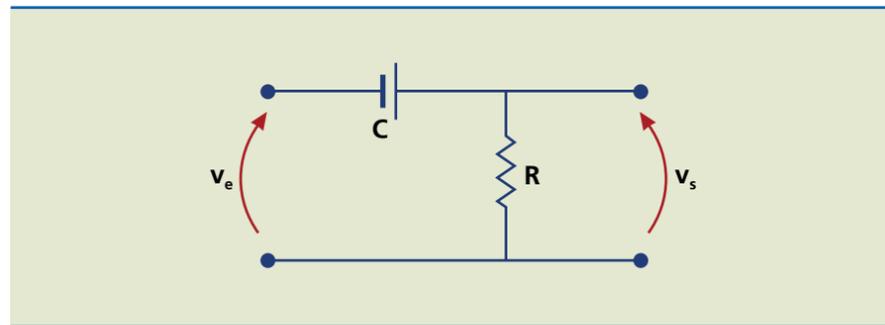
$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (14.10)$$



O mesmo circuito RC em série com tensão de saída sobre a resistência R é chamado filtro passa-alta, pois  $X_C$  é muito menor que R e, portanto, praticamente toda a tensão estará sobre a resistência do circuito (figuras 14.16 e 14.17).

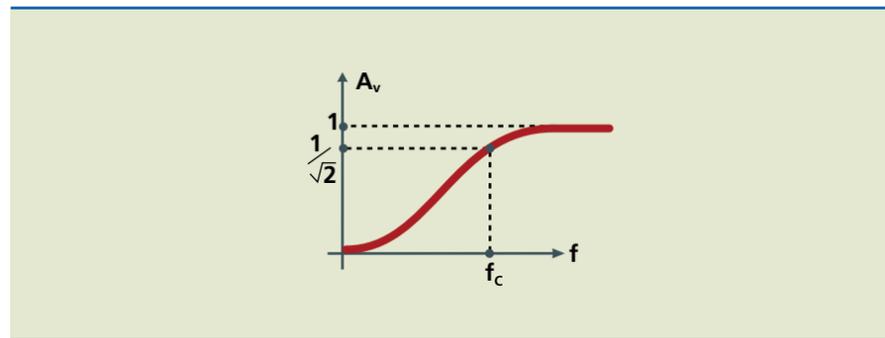
**Figura 14.16**

Circuito RC em série: filtro passa-alta.



**Figura 14.17**

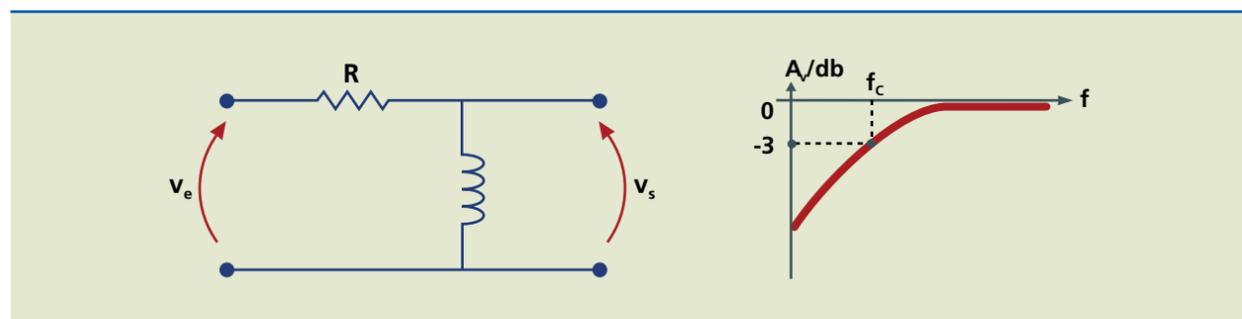
Gráfico do ganho de tensão no circuito RC em série.



A análise de circuitos RL em série (figura 14.18) é a mesma, porém, para altas frequências, prevalece a reatância indutiva ( $X_L$ ) ou o indutor sobre a resistência (R). Desse modo, para tensão de saída no indutor, o circuito é um filtro passa-alta ( $X_L$  muito maior que R e a tensão recai toda sobre  $X_L$ ); para tensão de saída na resistência, um filtro passa-baixa (R muito maior que  $X_L$  e a tensão recai toda sobre R).

**Figura 14.18**

Circuito RL em série e gráfico do ganho de tensão em função da frequência

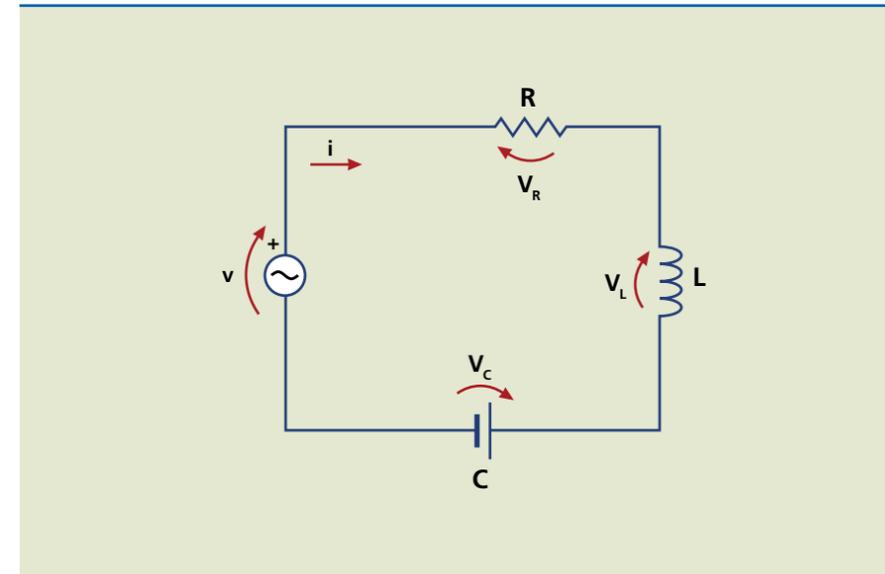


A frequência de corte é dada por:

$$f_c = \frac{R}{2\pi L} \quad (14.11)$$

## 14.4 Circuito RLC

### 14.4.1 Resistência, indutor e capacitor em série



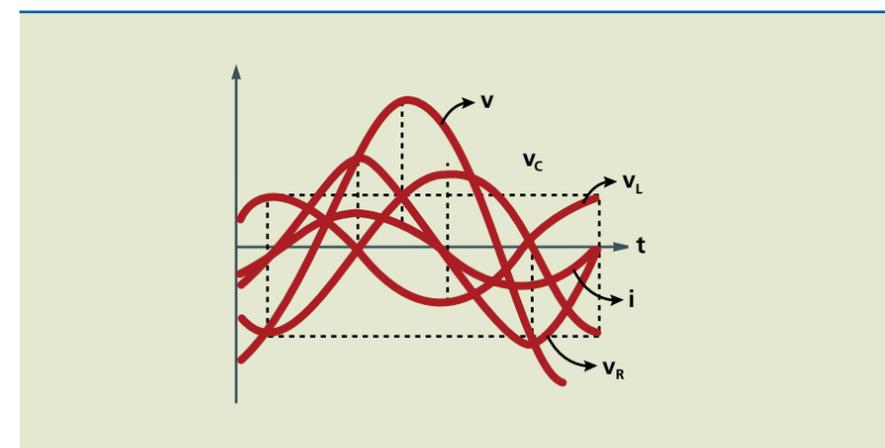
**Figura 14.19**

Circuito RLC em série.

Nesse caso, os três elementos básicos estão envolvidos na formação da impedância total do circuito (figura 14.19). Conforme já analisado, separadamente, a relação entre a tensão e a corrente em cada um deles é mantida. A corrente no circuito é única e defasada de  $\phi$  em relação à tensão do gerador. Em resumo:

- A tensão na resistência está em fase com a corrente no circuito.
- A tensão no capacitor está atrasada de  $90^\circ$  em relação à corrente no circuito.
- A tensão no indutor está adiantada de  $90^\circ$  em relação à corrente no circuito.
- Entre a tensão do indutor e a do capacitor há uma defasagem de  $180^\circ$ .

As figuras 14.20 e 14.21 mostram, respectivamente, os gráficos das tensões e da corrente e o diagrama fasorial de um circuito RLC em série.

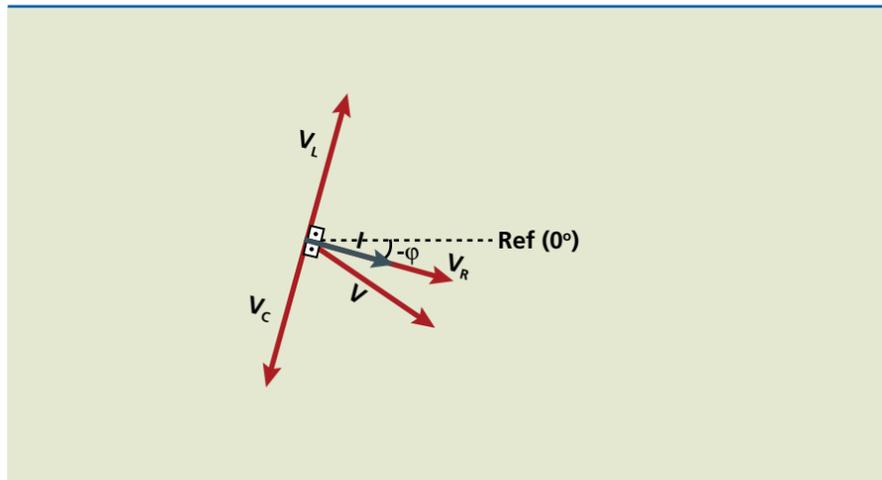


**Figura 14.20**

Gráficos das tensões e da corrente em circuito RLC.



**Figura 14.21**  
Diagrama fasorial de circuito RLC.



A impedância do circuito é dada por:

$$\bullet Z = R + j \cdot (X_L - X_C) [\Omega] \quad (14.12)$$

Na forma polar:

$$z = Z \angle \varphi \quad (14.13)$$

em que  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  e  $\varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$ , que é o ângulo de fase total do circuito.

$$\bullet i = \frac{V}{Z} \Rightarrow i = I \angle -\varphi \quad (14.14) \text{ constante para todo o circuito.}$$

$$\bullet V_R = RI \Rightarrow v_R = V_R \angle -\varphi \quad (14.15)$$

$$\bullet V_L = iX_L \Rightarrow v_L = V_L \angle -\varphi + 90^\circ \quad (14.16)$$

$$\bullet V_C = iX_C \Rightarrow v_C = V_C \angle -\varphi - 90^\circ \quad (14.17)$$

$$\bullet v = v_R + v_L + v_C \text{ (soma vetorial)}$$

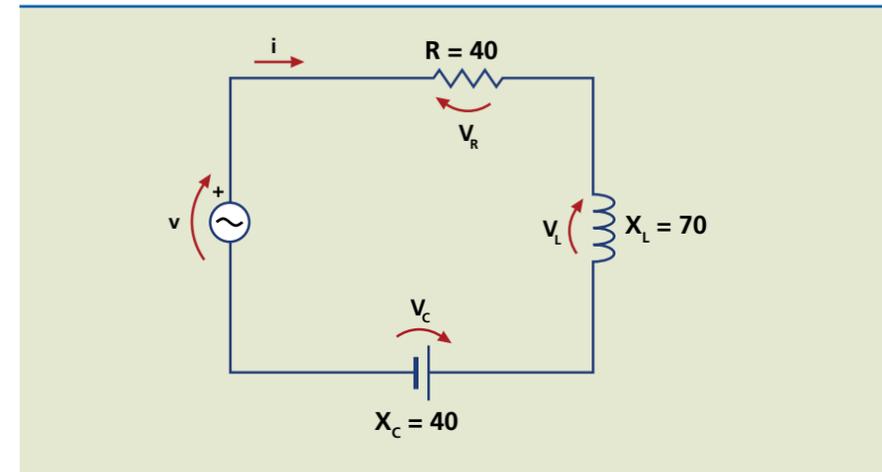
Quanto às potências:

- $P = v_R I \cos \varphi$  (potência ativa, medida em watt)
- $Q = (v_L - v_C) \cdot i = S \cdot \text{sen} \varphi$  (potência reativa, em volt-ampère reativo [VAR])
- $S = v \cdot i$  (potência aparente, em volt-ampère [VA])
- $S = P + Q$  (soma vetorial)

**Exemplo**

Para o circuito da figura 14.22, dado  $v(t) = 200 \cdot \text{sen}(377t + 30^\circ)$  [V], determine:

**Figura 14.22**



- a) o valor do capacitor e do indutor do circuito;
- b) os valores de Z e I na forma polar e a equação de  $i(t)$ ;
- c) os valores de  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  na forma polar;
- d) o diagrama fasorial;
- e) as potências aparente, ativa e reativa.

*Solução:*

$$\begin{aligned} \text{a) } X_C = 40 \Omega &\Rightarrow C = 1/(\omega \cdot X_C) = 1/(377 \cdot 40) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C = 66,3 \mu\text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_L = 70 \Omega &\Rightarrow L = X_L/\omega \Rightarrow L = 70/377 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = 185,7 \text{ mH} \end{aligned}$$

$$\text{b) } z = R + j \cdot (X_L - X_C) \Rightarrow z = 40 + j(70 - 40) \Rightarrow z = 40 + j30 [\Omega]$$

Na forma polar:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z \sqrt{40^2 + (30)^2} \Rightarrow Z = 50 [\Omega]$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{30}{40} = 36,87^\circ$$

Portanto:

$$\bullet Z = 50 \angle 36,87^\circ [\Omega]$$

$$i = \frac{v}{z} \Rightarrow i = \frac{200 \angle 30^\circ}{50 \angle 36,87^\circ} \Rightarrow i = 4 \angle -6,87^\circ [\text{A}]$$

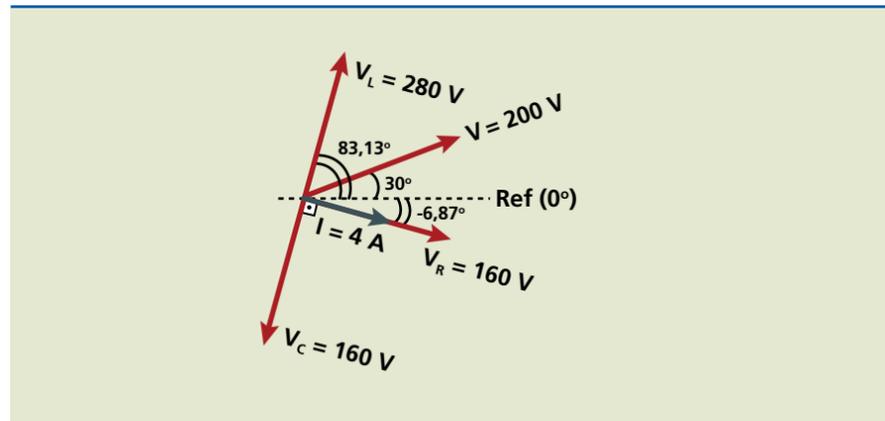
$$i(t) = i_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow i(t) = 4 \text{sen}(377t - 6,87^\circ) [\text{A}]$$



c)  $V_R = i \cdot R \Rightarrow V_R = 4 \angle -6,87^\circ \cdot 40 \angle 0^\circ \Rightarrow V_R = 160 \angle -6,87^\circ$  [V]  
 $V_L = i \cdot X_L \Rightarrow V_L = 4 \angle -6,87^\circ \cdot 70 \angle 90^\circ \Rightarrow V_L = 280 \angle 83,13^\circ$  [V]  
 $V_C = i \cdot X_C \Rightarrow V_C = 4 \angle -6,87^\circ \cdot 40 \angle -90^\circ \Rightarrow V_C = 160 \angle -96,87^\circ$  [V]

d) Diagrama fasorial (figura 14.23):

Figura 14.23

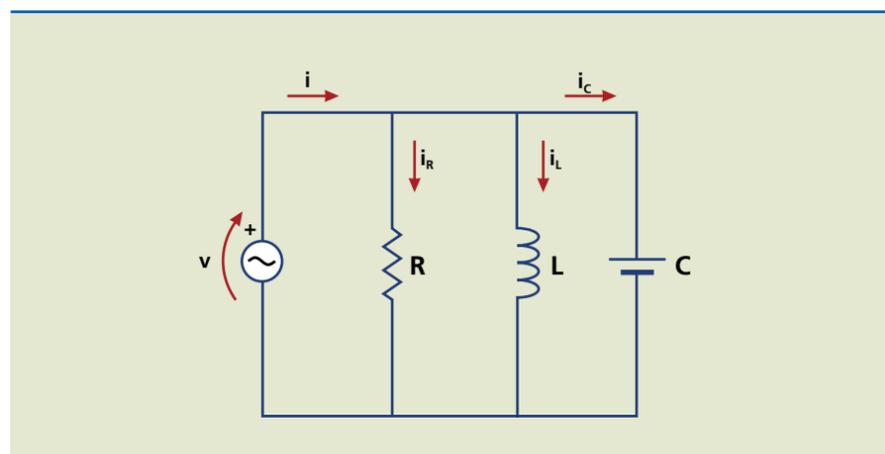


e)  $S = V \cdot i \Rightarrow S = 200 \angle 30^\circ \cdot 4 \angle -6,87^\circ \Rightarrow S = 800 \angle 23,13^\circ$  [VA]  
 $P = V_R \cdot i \Rightarrow P = 160 \angle -6,87^\circ \cdot 4 \angle -6,87^\circ \Rightarrow P = 640 \angle -13,74^\circ$  [W]  
 ou  
 $P = S \cos \phi \Rightarrow P = 800 \angle 23,13^\circ (\cos 36,87^\circ) \Rightarrow P = 640 \angle -13,74^\circ$  [W]  
 $Q = S \sin \phi \Rightarrow Q = 800 \angle 23,13^\circ (\sin 36,87^\circ) \Rightarrow Q = 480 \angle 76,26^\circ$  [VAr]

### 14.4.2 Resistência, indutor e capacitor em paralelo

Figura 14.24

Circuito RLC em paralelo.



No circuito RLC em paralelo (figura 14.25), o cálculo da impedância total segue regra semelhante ao da associação de resistores em paralelo, porém sugere-se fazê-lo usando a lei de Ohm. Mais uma vez, as características individuais dos diversos componentes são mantidas, mas a referência passa a ser a tensão, que agora é o elemento fixo do circuito.

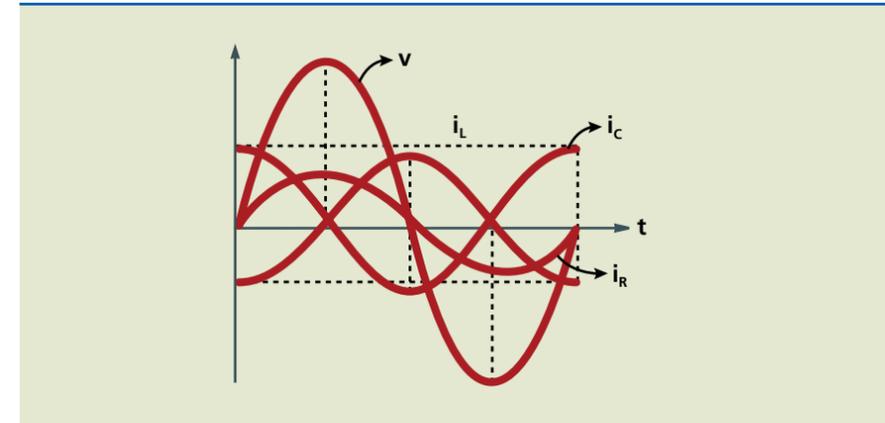


Figura 14.25

Circuito RLC em paralelo.

Desse modo:

- $I_R = v/R$
- $I_L = v/X_L$
- $I_C = v/X_C$
- $i = i_R + i_L + i_C$  (soma vetorial)

Logo:

$$z = v/i$$

### 14.4.3 Ressonância

Em um circuito RLC, seja em série, seja em paralelo, a ressonância ocorre quando o efeito do capacitor é anulado pelo efeito do indutor. Nesse caso, o circuito se comporta como circuito puramente resistivo. Isso acontece em dada frequência, que passa a ser denominada frequência de ressonância ( $f_0$ ), determinada por:

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\pi f_0 L = 1/(2\pi f_0 C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (14.18)$$

Ressalte-se que esse cálculo é o mesmo para os circuitos RLC em série e paralelo.

No caso do circuito RLC em série, verifica-se a menor impedância do circuito e, portanto, a maior corrente, quando:

$$Z = R \text{ ou } Z = R \angle 0^\circ \text{ } (\Omega) \quad (14.19)$$



Sendo:

$$v = v_{\text{máx}} \underline{0^\circ} \text{ [V]}$$

então:

$$i_0 = I_{\text{máx}} \underline{0^\circ} = \frac{V_{\text{máx}}}{R} \underline{0^\circ} \text{ [A]} \quad (14.20)$$

$$v_{R0} = i_0 R = V R_{\text{máx}} \underline{0^\circ} \text{ [V]} \quad (14.21)$$

$$v_{L0} = i_0 X_L = V L_{\text{máx}} \underline{90^\circ} \text{ [V]} \quad (14.22)$$

$$v_{C0} = i_0 X_C = V C_{\text{máx}} \underline{-90^\circ} \text{ [V]} \quad (14.23)$$

Como  $X_{C0} = X_{L0}$ , logo  $v_{C0} = v_{L0}$ , defasados de  $180^\circ$ ; assim,  $v_{R0} = v$  do gerador.

Em relação às potências:

$$S = S_0 = P_0 = i_0^2 \cdot R$$

Isso significa que:

$$\cos\phi = 1 = \text{fator de potência}$$

$$Q_0 = 0$$

### Exemplo

Determine a frequência de ressonância para um circuito RLC em série constituído de uma resistência de  $1 \text{ k}\Omega$ , uma indutância de  $50 \text{ mH}$  e um capacitor de  $2000 \text{ }\mu\text{F}$ .

Solução:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 \cdot 10^{-6}}} \\ \Rightarrow f_0 = 15,92 \text{ Hz}$$

### Correção do fator de potência

O circuito ressonante de baixa corrente é o desejo das concessionárias de energia, porém raramente ocorre, sobretudo quando a frequência da rede é constante ( $f = 60 \text{ Hz}$ ).

Como vimos, as concessionárias estabelecem limite para que não haja abuso em relação à corrente do circuito, sob pena de multa ao consumidor (principalmente industrial e comercial de grande porte). Uma forma de controlar esse excesso é limitando o valor do fator de potência. Hoje esse fator não deve ser menor do que  $0,92$ , havendo estudos para aumentá-lo para valor mais próximo de  $1$ . Quanto maior a influência dos capacitores e indutores no circuito, menor o valor do fator de potência, ou, ainda, quanto maior a potência reativa no circuito, menor o valor de  $\cos\phi$ .

A multa aplicada baseia-se na resolução da Aneel nº 456, de 2000, que estabelece:

$$\text{Valor da multa} = \text{valor da fatura} [(0,92/\cos\phi \text{ medido}) - 1]$$

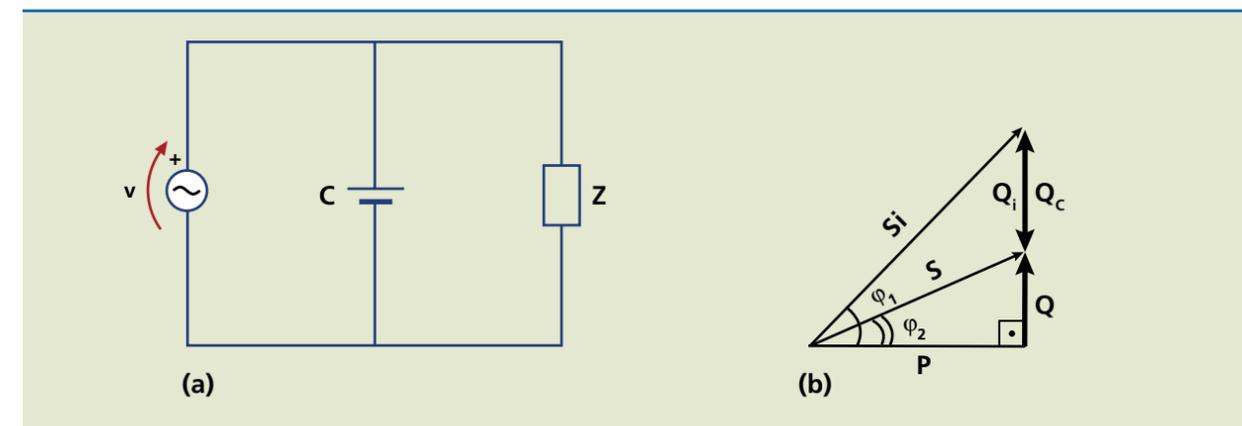
Na prática, a maioria dos circuitos tem predominância indutiva, devido à grande quantidade de dispositivos constituídos de indutores, como motores, reatores, transformadores etc. Desse modo, quando o fator de potência do circuito estiver abaixo do limite estabelecido ( $0,92$ ), devem-se acrescentar capacitores em paralelo ao gerador do circuito a fim de eliminar ou reduzir seu efeito, pois, como estudamos, entre as reatâncias e demais características do circuito (tensão ou corrente, dependendo de o circuito ser em série ou paralelo) existe defasagem de  $180^\circ$ , o que os torna opostos ou contrários.

A medida do fator de potência é feita com um instrumento denominado cosfímetro, e o acréscimo ou eventual retirada (quando se reduzem os indutores do circuito, máquinas ou equipamentos indutivos são desligados) de capacitores do circuito ocorre de modo automático.

Do mesmo modo que no cálculo de  $f_0$  (frequência de ressonância), podemos determinar o valor do capacitor ou conjunto de capacitores a ser ligado ao circuito (figura 14.26)

**Figura 14.26**

(a) Circuito com introdução de capacitor;  
(b) diagrama fasorial do circuito.



Assim:

$$Q = Q_i - Q_c$$



em que:

- $Q_i$  é a potência reativa inicial (ângulo  $\varphi_1$ );
- $Q_c$  a potência reativa do capacitor ou conjunto de capacitores;
- $Q$  a potência reativa final (ângulo  $\varphi_2$ ).

O valor do capacitor é dado por:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)}{(\omega V_{\text{ef}}^2)}$$

em que  $P$  é a potência ativa.

### Exemplo

Determine o valor do capacitor para corrigir o fator de potência para 0,95 de um circuito com  $V_{\text{ef}}$  do gerador igual a 220 V, potência ativa de 2,2 kW, frequência de 60 Hz e fator de potência 0,8.

*Solução:*

$$\cos\varphi_1 = 0,8 \Rightarrow \varphi_1 = 36,87^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0,95 \Rightarrow \varphi_2 = 18,19^\circ$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 60 = 377 \text{ rad/s}$$

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)}{(\omega V_{\text{ef}}^2)}$$

$$C = \frac{2200(\operatorname{tg}36,87^\circ - \operatorname{tg}18,19^\circ)}{377 \cdot 220^2}$$

$$C = \frac{2200 \cdot (0,75 - 0,33)}{377 \cdot 220^2}$$

$$C = 50,6 \mu\text{F}$$

# Capítulo 15

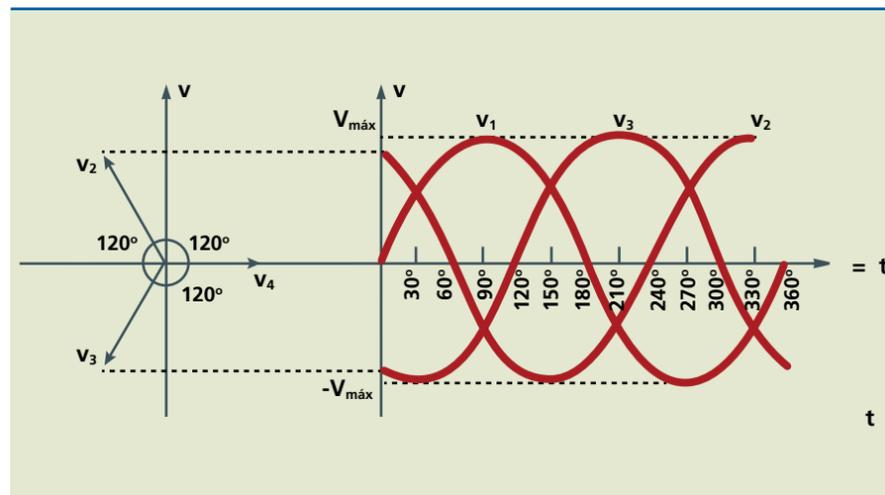
## Circuitos trifásicos em corrente alternada



**E**m um sistema trifásico, o gerador possui três enrolamentos fixos, posicionados no elemento do gerador denominado estator. Os enrolamentos estão dispostos de modo que haja uma separação física de  $120^\circ$  entre eles. Essa mesma diferença se reflete nas tensões geradas com defasagem de  $120^\circ$ , como mostra a figura 15.1.

**Figura 15.1**

Gráficos das tensões com defasagem de  $120^\circ$ .



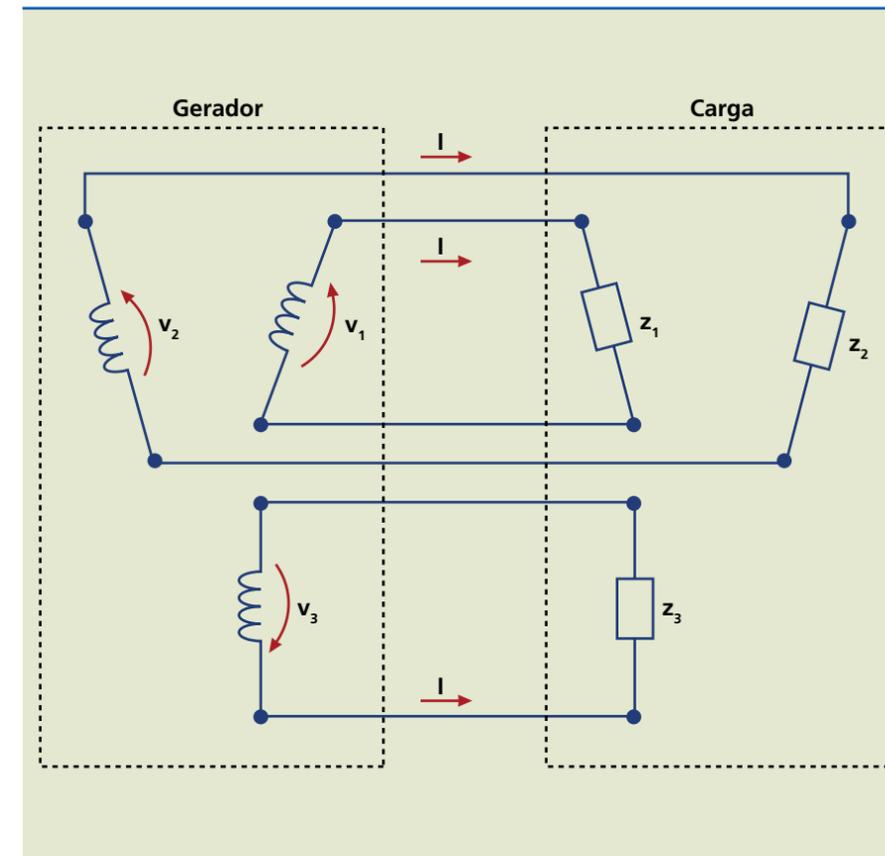
Considerando os enrolamentos iguais e, portanto, a mesma tensão máxima ( $V_{máx}$ ), por esse gráfico é possível estabelecer as seguintes relações:

- $V_1(t) = V_{máx} \text{sen}(\omega t)$
- $V_2(t) = V_{máx} \text{sen}(\omega t + 120^\circ)$
- $V_3(t) = V_{máx} \text{sen}(\omega t - 120^\circ)$

Dependendo da ligação dos enrolamentos à carga, o sistema trifásico pode ser: não interligado ou independente; interligado.

### 15.1 Sistema trifásico não interligado ou independente

Cada enrolamento é ligado a um circuito separado, não havendo nenhuma relação entre eles a não ser o gerador físico (figura 15.2).



**Figura 15.2**

Sistema trifásico independente.

Esse sistema não é muito utilizado, porque exige seis fios para as ligações com a carga, o que o torna antieconômico.

## 15.2 Sistema trifásico interligado

Também chamado simplesmente de sistema trifásico, nesse sistema, há duas formas básicas de ligação, de acordo com a ligação entre os enrolamentos: em estrela ou ípsilon ( $Y$ ) e triângulo ou delta ( $\Delta$ ).

Neste estudo, vamos analisar apenas os circuitos com cargas balanceadas ou iguais ( $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$ ), chamados de sistemas equilibrados, pois, do contrário, a parte matemática se torna complexa por causa da defasagem de  $120^\circ$  entre os sinais.

Nada impede, ainda, que o gerador esteja ligado, por exemplo, em triângulo e a carga em estrela ou vice-versa, porém faremos as representações apenas com ligações dos mesmos tipos, ou seja, triângulo-triângulo ou estrela-estrela.

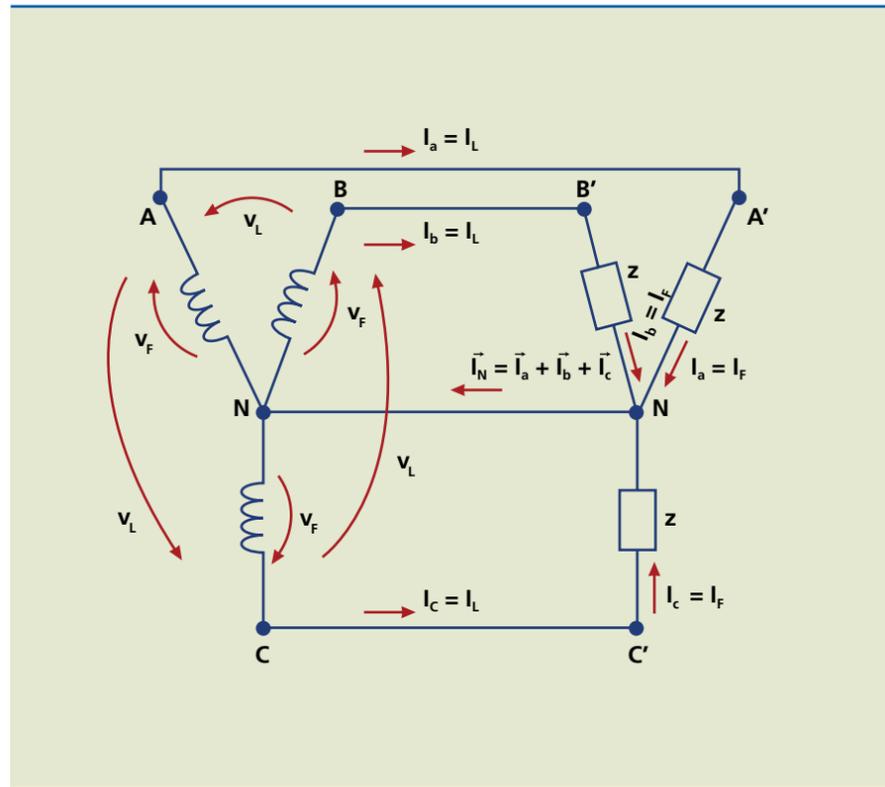
### 15.2.1 Ligação em estrela ou ípsilon ( $Y$ )

Nesse caso, os três enrolamentos do gerador, ou as três cargas, possuem um ponto comum, denominado neutro. Geralmente também são interligados o neutro do gerador com o neutro da carga (figura 15.3).



**Figura 15.3**

Ligação de carga e geradores em estrela com neutros interligados.



Como se observa na figura:

$$I_n = I_a + I_b + I_c \text{ (soma vetorial)}$$

Para o sistema equilibrado,  $I_n = 0$ .

**Tensões e correntes de linha e fase**

Tensões de fase ( $V_F$ ) são as tensões sobre cada enrolamento do gerador, ou sobre cada carga, ou, ainda, entre um dos terminais do gerador e o ponto comum ou neutro. Correntes de fase ( $I_F$ ) são as correntes que circulam entre os terminais e o neutro, ou nos enrolamentos, ou, ainda, em cada carga separadamente em direção ao neutro.

Tensões de linha ( $V_L$ ) são as tensões entre cada dois terminais do gerador (menos o neutro) e, no caso da carga, a tensão do gerador. Correntes de linha ( $I_L$ ) são as correntes que saem do gerador em direção à carga.

Analisando as tensões e correntes de linha e fase do gerador e da carga em estrela, obtêm-se as relações:

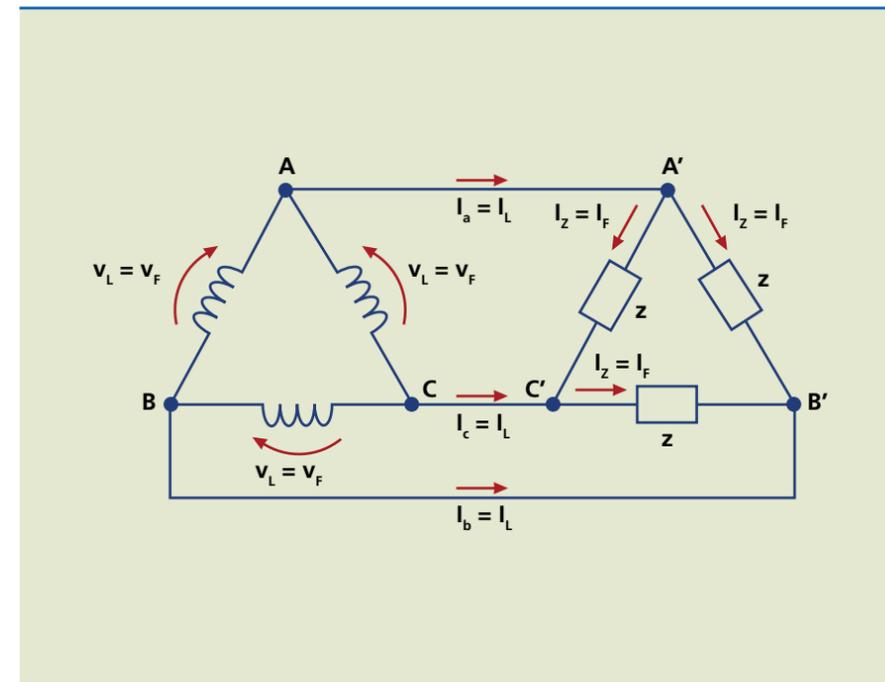
$$V_L = V_F \sqrt{3}$$

e

$$I_L = I_F$$

**15.2.2 Ligação em delta ou triângulo ( $\Delta$ )**

Nesse caso, os enrolamentos do gerador, ou as cargas, possuem dois a dois um ponto em comum, e a ligação adquire o formato de um triângulo (figura 15.4).



**Figura 15.4**

Ligação dos geradores em triângulo.

Como se pode observar, a tensão do gerador é a mesma que chega à carga, e ocorre uma composição de correntes duas a duas em cada carga, devido à soma vetorial, por causa da defasagem de  $120^\circ$  entre elas, resultando em:

$$V_L = V_F$$

e

$$I_L = I_F \sqrt{3}$$

**15.3 Potências em sistemas trifásicos**

Lembrando os estudos de circuitos em série e paralelo, não importa o circuito, sua potência total é sempre a soma das potências individuais. O mesmo se repete em sistemas trifásicos.

A potência que interessa aqui é a potência sobre cada carga, ou seja, a potência com valores de fase e eficazes do circuito. Assim, analisando cada ligação (triângulo ou estrela), observa-se que a relação entre as tensões e correntes de fase e linha estão invertidas, ou seja, ora as tensões de linha e fase são iguais (triângulo) e as correntes têm relação de  $\sqrt{3}$ , ora o inverso (estrela), porém os produtos finais mantêm a mesma relação.



## Potência ativa por fase

$$P = v_F \cdot i_F \cdot \cos\varphi$$

Relacionando com valores de linha em estrela:

$$P = (v_L/\sqrt{3}) \cdot i_L \cdot \cos\varphi$$

Relacionando com valores de linha em triângulo:

$$P = (i_L/\sqrt{3}) \cdot v_L \cdot \cos\varphi$$

**Nota**

Por diversas razões, as relações entre as potências calculadas por valores de fase e por valores de linha em estrela e triângulo são iguais. Logo, efetuaremos a representação de apenas uma delas, uma vez que a relação final é a mesma. É importante lembrar, no entanto, que os valores em cada uma das ligações são diferentes; o que se mantém são as relações.

## Potência ativa total no sistema trifásico (circuitos equilibrados)

$$P_T = 3P = 3v_F i_F \cos\varphi \text{ [W]}$$

ou

$$P_T = \sqrt{3} v_L i_L \cos\varphi \text{ [W]}$$

## Potência reativa total no sistema trifásico (circuitos equilibrados)

$$Q_T = 3Q = 3v_F i_F \sin\varphi \text{ [VAr]}$$

ou

$$Q_T = \sqrt{3} v_L i_L \sin\varphi \text{ [VAr]}$$

## Potência aparente total no sistema trifásico (circuitos equilibrados)

$$S_T = 3S = 3v_F i_F \text{ [VA]}$$

ou

$$S_T = \sqrt{3} v_L i_L \text{ [VA]}$$

**Exemplo**

Um motor possui enrolamentos com reatância indutiva de  $4 \Omega$  e resistência interna de  $3 \Omega$  cada um. A tensão da rede que alimenta o motor é de  $220 V_{ef}$  (tensão de linha). Determine as correntes de linha e fase, bem como as potências ativa, aparente e reativa totais, para as ligações em estrela e em triângulo.

*Solução:*

a) Ligação em estrela (figura 15.5):

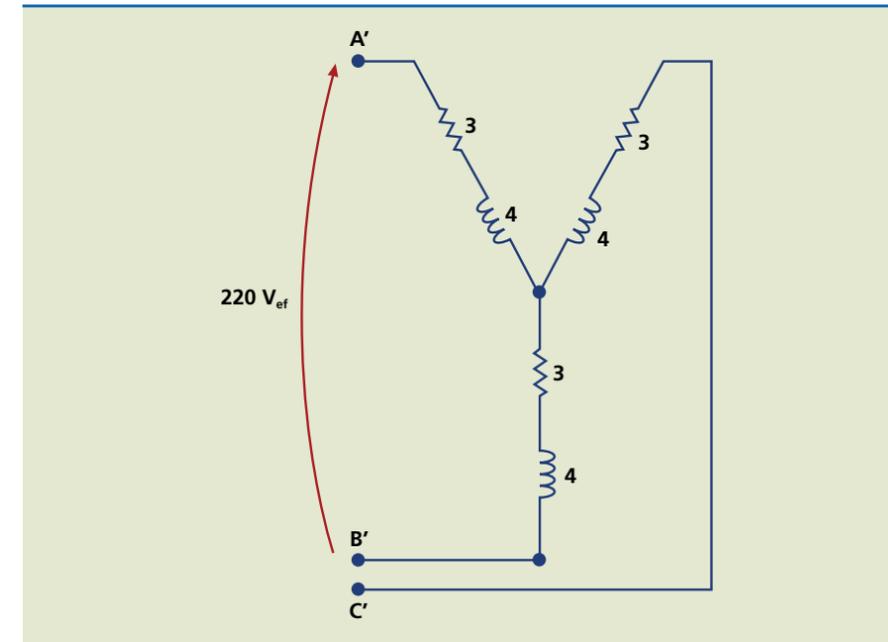


Figura 15.5

$$z = 3 + 4j \text{ [\Omega]}$$

logo:

$$z = 5 \angle 53,13^\circ$$

Trabalhando apenas com o módulo, temos:

$$v_L = v_F \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 220 = v_F \cdot \sqrt{3} \Rightarrow v_F = 127 \text{ [V}_{ef}]$$

$$i_L = i_F = \frac{v_F}{Z} \Rightarrow i_L = i_F = \frac{127}{5} \Rightarrow i_L = i_F = 25,4 \text{ [A}_{ef}]$$

$$S_T = 3S = 3v_F i_F = 127 \cdot 25,4 \rightarrow S_T = 3 \ 225,8 \text{ [VA]}$$

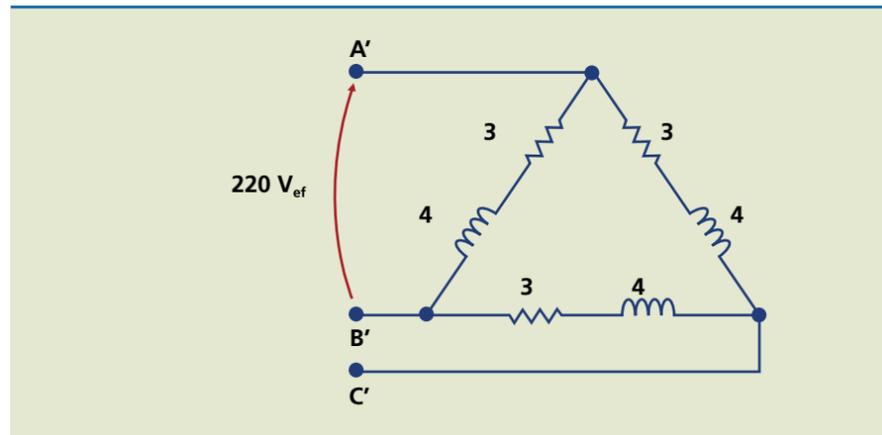
$$P_T = S_T \cos\varphi = 3 \ 225,8 \cdot \cos 53,13^\circ \Rightarrow P_T = 1935,48 \text{ [W]}$$

$$Q_T = S_T \sin\varphi = 3 \ 225,8 \cdot \sin 53,13^\circ \Rightarrow Q_T = 2580,64 \text{ [VAr]}$$



b) Ligação em triângulo (figura 15.6):

Figura 15.6



$$v_L = v_F = 220 V_{ef}$$

$$i_F = \frac{v_F}{Z} = \frac{220}{5} \Rightarrow i_F = 44 [A_{ef}]$$

$$i_L = i_F \sqrt{3} = 44 \sqrt{3} \Rightarrow i_L = 76,21 [A_{ef}]$$

$$S_T = 3S = 3 v_F i_F = 220 \cdot 44 \Rightarrow S_T = 9680 [VA]$$

$$P_T = S_T \cos \varphi = 9680 \cdot \cos 53,13^\circ \Rightarrow P_T = 5808 [W]$$

$$Q_T = S_T \sin \varphi = 9680 \cdot \sin 53,13^\circ \Rightarrow Q_T = 7744 [VA_r]$$

Comparando os resultados obtidos com as duas ligações, para mesma tensão e mesma carga, observa-se que a corrente de linha em triângulo é três vezes maior que em estrela, e o mesmo vale entre as potências.

Por isso, a partida de um motor trifásico é feita em estrela, pois na partida a corrente do motor aumenta. Como em estrela o valor inicial é menor, a corrente de pico de partida também é. Entretanto, como em triângulo as potências são maiores, utiliza-se, por exemplo, uma chave estrela-triângulo automática, com a partida em estrela e o regime nominal em triângulo.

## Referências bibliográficas



ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. *Curso de física*. Vol. 3. 3ª ed. São Paulo: Scipione, 2007.

ANZENHOFER, K. et al. *Eletrotécnica para escolas profissionais*. 3ª ed. São Paulo: Mestre Jou, 1980.

BENCHIMOL, A. *Uma breve história da eletrônica*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

COTRIM, A. A. M. B. *Instalações elétricas*. 4ª ed. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2008.

CREDER, H. *Instalações elétricas*. 15ª ed. revista e atualizada. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de física*. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FILIPPO FILHO, G. *Motor de indução*. São Paulo: Érica, 2000.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, C.; UMANS, S. D. *Máquinas elétricas*. 6ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

GOZZI, G. G. M. *Circuitos magnéticos*. São Paulo: Érica, 1996.

GUSSOW, M. *Eletricidade básica*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1985.

JORDÃO, R. G. *Máquinas síncronas*. Rio de Janeiro: LTC; São Paulo: Edusp, 1980.

MARTINS, J. B. *A história da eletricidade*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

PAZOS, F. *Automação de sistemas e robótica*. Rio de Janeiro: Axcel Books, 2002.

RAMALHO, F. et al. *Os fundamentos da física*. Vol. 3. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 1978.

YOUNG, H.; SEARS, F.; ZEMANSKY, M. W. *Física 3: eletricidade e magnetismo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1984.

#### SITES

ABNT: <<http://www.abnt.org.br>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

ANSI-J-STD 607-A - Normas para aterramento: <<http://www.ansi.org>>. Acesso em: 29 jun. 2011.



CPFL: <<http://www.cpfl.com.br>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

Elektor: <<http://www.elektor.com>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

Força atrativa e força repulsiva: <<http://educacao.uol.com.br/fisica/condutores-retilineos-e-paralelos-regra-da-mao.jhtm>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

Máquinas elétricas: <[http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_T07.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_T07.asp)>. Acesso em: 29 jun. 2011.

Motores elétricos – CTAI (Centro de Tecnologia em Automação e Informática):  
- <<http://www.ctai.senai.br>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

Projeto Física e Cidadania: <<http://www.ufjf.br/fisicaecidadania/>>. Acesso em: 29 jun. 2011.

WEG: <<http://www.weg.net/br>>. Acesso em: 29 jun. 2011.







**CENTRO PAULA SOUZA DO GOVERNO DE SÃO PAULO**





## Excelência no ensino profissional

Administrador da maior rede estadual de educação profissional do país, o Centro Paula Souza tem papel de destaque entre as estratégias do Governo de São Paulo para promover o desenvolvimento econômico e a inclusão social no Estado, na medida em que capta as demandas das diferentes regiões paulistas. Suas Escolas Técnicas (Etecs) e Faculdades de Tecnologia (Fatecs) formam profissionais capacitados para atuar na gestão ou na linha de frente de operações nos diversos segmentos da economia.

Um indicador dessa competência é o índice de inserção dos profissionais no mercado de trabalho. Oito entre dez alunos formados pelas Etecs e Fatecs estão empregados um ano após concluírem o curso. Além da excelência, a instituição mantém o compromisso permanente de democratizar a educação gratuita e de qualidade. O Sistema de Pontuação Acrescida beneficia candidatas afrodescendentes e oriundos da Rede Pública. Mais de 70% dos aprovados nos processos seletivos das Etecs e Fatecs vêm do ensino público.

O Centro Paula Souza atua também na qualificação e requalificação de trabalhadores, por meio do Programa de Formação Inicial e Educação Continuada. E ainda oferece o Programa de Mestrado em Tecnologia, recomendado pela Capes e reconhecido pelo MEC, que tem como área de concentração a inovação tecnológica e o desenvolvimento sustentável.